Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 133.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35. Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1908.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 133.

Appell, P., Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement Seite 93

Hazzidakis, J. N., Über die Kräfte, die Kegelschnitte als Bahnen hervorrufen — 68

Horn, J., Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen . . . . . — 19

Jahnke, E., Über orthogonale Substitutionen und die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten . . . . . — 243

Jung, H. W. E., Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$ . . . . . — 289

Koenigsberger, Leo, Über die Elimination von Variabeln zwischen den *Lagrange*schen Gleichungen der Dynamik . . . . . — 179

Pirondini, G., Sur la théorie génerale des radiales et des anti-radiales . . . — 7

Réthy, M., Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel . . . . . — 284

Thomé, L. W., Über simultane lineare Differentialgleichungen . . . . . — 1

— — Schlußbemerkung in betreff der vom Verfasser in diesem Journal veröffentlichten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen . . . . . — 18

Voronoï, G., Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques . . . . . — 97

Druckfehlerverzeichnis der Arbeiten von **O. Perron** (Bd. 132) und **G. Voronoï** (Bd. 133) . . . . . — 242

Namenverzeichnis . . . . . — 315

185633

Über simultane lineare Differentialgleichungen.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Die Untersuchungen über simultane lineare Differentialgleichungen, welche in der Abhandlung des Verfassers in Band 131 dieses Journals angestellt sind, werden in der folgenden Arbeit weiter fortgeführt und abgeschlossen. Es handelt sich darum, wie in der Einleitung der genannten Abhandlung gesagt ist, die Integration der simultanen linearen Differentialgleichungen auf diejenige von einzelnen homogenen linearen Differentialgleichungen zurückzuführen. Dort war der Hauptfall behandelt, wobei man nur auf eine einzige einzelne homogene lineare Differentialgleichung zurückkommt. Wenn man von der Voraussetzung für denselben absieht, so ergibt sich bei derselben Richtung der Untersuchung das Zusammenbestehen einer einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung mit simultanen nicht homogenen linearen Differentialgleichungen in entsprechend geringerer Anzahl. Die Integration letzterer Differentialgleichungen kommt auf diejenige der zugehörigen simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen zurück. Diese werden dann nach demselben Verfahren weiter behandelt. Bei ein- oder mehrwertigen algebraischen Koeffizienten in den simultanen linearen Differentialgleichungen lassen sich auf diese Weise die wesentlichen allgemeinen Eigenschaften der Integrale aus den für einzelne homogene lineare Differentialgleichungen mit Koeffizienten derselben Art bekannten Eigenschaften herleiten, und es wird die Integration auf diejenige letzterer Differentialgleichungen zurückgeführt. —

Mit dieser Abhandlung haben die Untersuchungen des Verfassers über lineare Differentialgleichungen, die in Band 74 dieses Journals anfangen, einen natürlichen Abschluß erreicht. Es kam im Verlauf derselben darauf an, die Integration von linearen Differentialgleichungen mit ein- oder mehrwertigen algebraischen Koeffizienten auf Grund der Darstellung der Integrale

bei den singulären Punkten zu vollziehen, so lange nichts Spezielles über den Ursprung und die Natur der Differentialgleichungen bekannt ist. Diese Untersuchungen haben im Anschluß an die Arbeiten von *Fuchs* über reguläre lineare Differentialgleichungen zur Integration von solchen linearen Differentialgleichungen geführt, *deren Analyse spezielle Konvergenzbetrachtungen nicht erfordert.*

1.

Zurückführung der Integration eines Systems von m simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen auf die Integration einer einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung und eines Systems von weniger als m simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen.

Die m simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen seien

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(y, u, \dots z), \\ \dfrac{du}{dx} = f_2(y, u, \dots z), \\ \vdots \\ \dfrac{dz}{dx} = f_m(y, u, \dots z), \end{cases}$$

wo

$$(2.)\qquad f_r(y, u, \dots z) = a_{r1}\, y + a_{r2}\, u + \cdots + a_{rm}\, z \qquad (r = 1, \dots m)$$

ist. Die Koeffizienten a_{rs} hängen von x ab und sollen die in Abhandlung Bd. 131 Nr. 1 dieses Journals angegebene Eigenschaft haben, aber vorzugsweise als rationale Funktionen von x oder rationale Ausdrücke von x und einer irreduktibeln ganzen algebraischen Funktion S betrachtet werden. Aus (1.) folgt durch Differentiation

$$(3.)\qquad \frac{dy}{dx} = f_1(y, u, \dots z),$$

$$(4.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1(f_1, f_2, \dots f_m) = F_2(y, u, \dots z),$$

$$(5.)\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\partial F_2}{\partial x}+F_2(f_1, f_2, \dots f_m)=F_3(y, u, \dots z),$$

$$\vdots$$

$$(6.)\qquad \frac{d^ry}{dx^r}=\frac{\partial F_{r-1}}{\partial x}+F_{r-1}(f_1, f_2, \dots f_m)=F_r(y, u, \dots z).$$

Es sei

$$(7.)\qquad F_r(y, u, \dots z)=b_ry+A_{r1}u+\dots+A_{r,\,m-1}z \qquad (r=1, \dots m)$$

gesetzt, dabei $F_1=f_1$. Also besteht das Gleichungssystem

$$(8.)\qquad \frac{d^ry}{dx^r}=b_ry+A_{r1}u+\dots+A_{r,\,m-1}z. \qquad (r=1, \dots m)$$

Aus demselben folgt

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dy}{dx}-b_1y & A_{11} & \dots & A_{1,\,m-1} \\ \frac{d_2y}{dx_2}-b_2y & A_{21} & \dots & A_{2,\,m-1} \\ \vdots & & & \\ \frac{d^my}{dx_m}-b_my & A_{m1} & \dots & A_{m,\,m-1} \end{vmatrix}=0.$$

Wenn die Determinante

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,\,m-1} \\ A_{21} & \dots & A_{2,\,m-1} \\ \vdots & & \\ A_{m-1,\,1} & \dots & A_{m-1,\,m-1} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet, so ist (9.) eine homogene lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung für y, und durch Auflösung der $m-1$ ersten Gleichungen (8.) erhält man u bis z linear und homogen durch $y, \frac{dy}{dx}$ bis $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ ausgedrückt. Falls bei einer der m Variablen y, u bis z die (10.)

entsprechende $(m-1)$-reihige Determinante nicht identisch verschwindet, so ist dies der in Abhandlung Bd. 131 dieses Journals behandelte Fall. Derselbe tritt nach dem a. a. O. Nr. 2 III Nr. 3 Gesagten im allgemeinen auf.

Hier wird von dieser Voraussetzung abgesehen und direkt das Gleichungssystem (8.) behandelt. Es wird die Matrix

$$A_{r1}, A_{r2}, \dots A_{r,\,m-1} \qquad (r=1,\dots m) \tag{11.}$$

betrachtet. Wenn für $r=1$ alle Elemente in (11.) verschwinden, so genügt y der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - b_1 y = 0. \tag{12.}$$

Wenn für $r=1$ nicht alle Elemente in (11.) verschwinden, so soll aus den Zeilen (11.) für $r=1$ bis $\lambda-1$ eine $(\lambda-1)$-reihige Determinante hervorgehen, welche nicht identisch verschwindet; als solche kann folgende angesetzt werden:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1,\,\lambda-1} \\ A^{21} & A_{22} & \cdots A_{2,\,\lambda-1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ A_{\lambda-1,1} & A_{\lambda-1,2} & \cdots A_{\lambda-1,\,\lambda-1} \end{vmatrix} = D_{\lambda-1}, \tag{13.}$$

und es sollen die λ-reihigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1,\,\lambda-1} & A_{1,\,i} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots A_{2,\,\lambda-1} & A_{2,\,i} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ A_{\lambda-1,1} & A_{\lambda-1,2} & \cdots A_{\lambda-1,\,\lambda-1} & A_{\lambda-1,\,i} \\ A_{\lambda,1} & A_{\lambda,2} & \cdots A_{\lambda,\,\lambda-1} & A_{\lambda,\,i} \end{vmatrix} \qquad (i=1,\dots m-1) \tag{14.}$$

alle verschwinden. Für $\lambda=m$ verschwindet die Determinante (14.) bei beliebigen A. Dann folgt aus den λ ersten Gleichungen (8.):

$$(15.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} - b_1 y & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,\lambda-1} \\ \frac{d^2y}{dx^2} - b_2 y & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,\lambda-1} \\ \vdots & & & & \\ \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} - b_\lambda y & A_{\lambda 1} & A_{\lambda 2} & \cdots & A_{\lambda,\lambda-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Differentialgleichung, in welcher also $\lambda > 1$ ist, sei auf die Form

$$(16.)\qquad \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} + p_1 \frac{d^{\lambda-1} y}{dx^{\lambda-1}} + \cdots + p_\lambda y = 0$$

gebracht; bei $\lambda = 1$ soll (16.) die Differentialgleichung (12.) sein. Die Koeffizienten p sind rationale Ausdrücke der a_{rs} in (2.) und deren Ableitungen, demnach, wenn die a_{rs} rationale Funktionen von x sind, oder rational x und die algebraische Funktion S enthalten, so sind die p Ausdrücke derselben Art.

Bei $\lambda > 1$ sei aus der Reihe der $m-1$ Variablen u bis z die $(\lambda-1)$-te durch s, die λ-te durch t bezeichnet. Dann ergeben sich aus den $\lambda - 1$ ersten Gleichungen (8.) die $\lambda - 1$ Funktionen u bis s unter der Form

$$(17.)\qquad \frac{1}{D_{\lambda-1}} \Big\{ h_{r0} y + h_{r1} \frac{dy}{dx} + \cdots + h_{r,\lambda-1} \frac{d^{\lambda-1} y}{dx^{\lambda-1}} + h_{r\lambda}\, t + \cdots + h_{r,m-1}\, z \Big\}, \qquad (r = 1, \ldots \lambda-1)$$

wo in bezug auf $D_{\lambda-1}$ und die Koeffizienten h das von den Koeffizienten p in (16.) Gesagte gilt. Die Ausdrücke (17.) für die Variablen u bis s werden nun in die Differentialgleichungen (1.) für t bis z eingeführt. Dieselben nehmen dadurch die Form an:

$$(18.)\qquad \begin{cases} \frac{dt}{dx} = g_1(t, \ldots z) + Y_1, \\ \vdots \\ \frac{dz}{dx} = g_{m-\lambda}(t, \ldots z) + Y_{m-\lambda}, \end{cases}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} (19.)\qquad & g_r = b_{r1}\,t + \cdots + b_{r,m-\lambda}\,z, \\ (20.)\qquad & Y_r = c_{r0}\,y + c_{r1}\frac{dy}{dx} + \cdots + c_{r,\lambda-1}\frac{d^{\lambda-1}y}{dx^{\lambda-1}} \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, \ldots m-\lambda)$$

ist, von den Koeffizienten b_{rx}, c_{rx} das gilt, was in bezug auf die p (16.) gesagt ist. Wenn in (16.) $\lambda = 1$ ist, so kommt (17.) nicht vor, die Differentialgleichungen (18.) sind die aus (1.) von $\frac{du}{dx}$ an bis $\frac{dz}{dx}$; ist $\lambda = m$, so kommt (18.) nicht vor.

In einer beliebigen Lösung y, u bis z der simultanen Differentialgleichungen (1.) sind wegen der $\lambda - 1$ ersten Gleichungen (8.) und der über $D_{\lambda-1}$ (13.) gemachten Voraussetzung nicht alle Funktionen y, t bis z gleich Null. Jede Lösung $y, u, \ldots s, t, \ldots z$ des Systems (1.) tritt nun unter der Form auf: $y, t, \ldots z$ und bei $\lambda > 1$ für u bis s die Ausdrücke (17.), wo y die homogene lineare Differentialgleichung λ-ter Ordnung (16.) erfüllt, die $m - \lambda$ Funktionen t bis z den $m - \lambda$ simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen (18.) genügen.

Und umgekehrt: y erfülle der homogene lineare Differentialgleichung λ-ter Ordnung (16.), die Funktionen t bis z sollen die $m - \lambda$ simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen (18.) befriedigen. Hierbei mögen einzelne, aber nicht alle Funktionen y, t bis z gleich Null sein. Bei $\lambda > 1$ seien die $\lambda - 1$ Funktionen u bis s durch die $\lambda - 1$ Ausdrücke (17.) gegeben oder damit gleichbedeutend durch die $\lambda - 1$ ersten Gleichungen (8.); dann ist wegen (13.), (14.), (15.) auch die λ-te Gleichung (8.) erfüllt. Aus dem System (1.) sind jetzt die Differentialgleichungen

$$(21.)\qquad \frac{dy}{dx} = f_1,\ \frac{dt}{dx} = f_{\lambda+1},\ \cdots\ \frac{dz}{dx} = f_m$$

befriedigt. Nun ergibt sich durch Differentiation der ersten Gleichung (8.) wegen (4.), durch Differentiation der zweiten Gleichung (8.) wegen (5.) usw.:

$$(22.)\qquad \left\{\begin{aligned} & A_{11}\ \left(\frac{du}{dx} - f_2\right) + \cdots + A_{1,\lambda-1}\ \left(\frac{ds}{dx} - f_\lambda\right) = 0, \\ & A_{21}\ \left(\frac{du}{dx} - f_2\right) + \cdots + A_{2,\lambda-1}\ \left(\frac{ds}{dx} - f_\lambda\right) = 0, \\ & \vdots \\ & A_{\lambda-1,1}\left(\frac{du}{dx} - f_2\right) + \cdots + A_{\lambda-1,\lambda-1}\left(\frac{ds}{dx} - f_\lambda\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Also sind auch die übrigen $\lambda-1$ Differentialgleichungen aus dem Systeme (1.)

$$\frac{du}{dx}=f_2,\ \cdots\ \frac{ds}{dx}=f_\lambda \tag{23.}$$

erfüllt.

Damit ist die Integration des Systemes (1.) zurückgeführt auf die Integration der einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung λ-ter Ordnung (16.) und die Integration des Systems von $m-\lambda$ simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen (18.), wobei einzelne, aber nicht alle $m-\lambda+1$ Funktionen y, t bis z gleich Null sein können.

Die Integration der simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen (18.) kommt unter Anwendung der Methode der Variation der Konstanten (vgl. Nr. 2 I) zurück auf die Integration der simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen (18.), nachdem dort die Y gleich Null gesetzt sind. Auf dieses System sind dann dieselben Betrachtungen anzuwenden.

Letzteres System ist

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx}=g_1(t,\dots z), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{dz}{dx}=g_{m-\lambda}(t,\dots z), \end{cases} \tag{24.}$$

wo

$$g_r=b_{r1}t+\cdots+b_{r,\,m-\lambda}z. \qquad (r=1,\dots m-\lambda) \tag{25.}$$

Die Koeffizienten b sind rationale Funktionen von x, bezüglich enthalten x und die algebraische Funktion S rational, wenn dies bei den Koeffizienten a_{rs} (2.) der Fall war, und werden vor jeder Integration bekannt. Das System (24.) kann in mehrere von einander unabhängige Systeme zerfallen, sodaß die abhängigen Variablen, die in dem einen Systeme vorkommen, nicht auch in dem anderen sich finden. Wird das vorhin angegebene Verfahren auf (24.) angewandt, so wird dadurch gleichzeitig jedes der letzteren Systeme für sich behandelt. Auf diese Weise wird fortgefahren, bis in einem System von k simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen die (10.) entsprechende $(k-1)$-reihige Determinante nicht verschwindet, oder bis ein solches System vollständig in einzelne Differentialgleichungen (erster Ordnung) zerfällt.

Die $(m-1)$-reihige Determinante (10.) bei y und die entsprechenden $(m-1)$-reihigen Determinanten bei den Variablen u bis z verschwinden alle, wenn von keiner der Variablen y, u bis z m linear unabhängige Integrale in dem Systeme (1.) vorhanden sind. Ein solches System ist beispielsweise

$$(26.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}\,y, \\ \dfrac{du}{dx} = a_{21}\,y + a_{22}\,u, \\ \dfrac{dv}{dx} = a_{31}\,y + a_{33}\,v + a_{35}\,z, \\ \dfrac{dw}{dx} = a_{44}\,w + a_{45}\,z, \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{55}\,z. \end{cases}$$

Dieses System zerfällt nicht in getrennte Systeme. Von y und z kommt nur je ein Integral vor; von u kommen nicht mehr als zwei Integrale vor (bei $y=0$ und y aus der ersten Differentialgleichung); ebenso von w; von v kommen nicht mehr als drei Integrale vor (bei $y=0,\ z=0$; $y=0,\ z$; $z=0,\ y$). In ähnlicher Weise können solche Systeme für $m>2$ gebildet werden.

2.

Die Form der Integrale der simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen bei den singulären Punkten.

I. Zunächst werden folgende bekannte Sätze angeführt.

A) (1.) $y_r, u_r, \dots z_r \qquad (r=1, \dots m)$

sei ein System von Lösungen der simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.), dessen Determinante nicht identisch verschwindet — Fundamentalsystem, vgl. Abh. Bd. 131, Nr. 1; — dann hat diese Determinante Δ den Ausdruck

$$(2.)\quad \Delta = c\,e^{\int (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm})\,dx},$$

wo c eine Konstante ist.

B) Das System simultaner nichthomogener linearer Differentialgleichungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1 + X_1, \\ \dfrac{du}{dx} = f_2 + X_2, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{dz}{dx} = f_m + X_m \end{cases}$$

liege vor. Wenn die Determinante

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} y_1 \dots y_{r-1} & \varepsilon_1 & y_{r+1} \dots y_m \\ u_1 \dots u_{r-1} & \varepsilon_2 & u_{r+1} \dots u_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1 \dots z_{r-1} & \varepsilon_m & z_{r+1} \dots z_m \end{vmatrix} = L_{ir}$$

gesetzt wird, worin $\varepsilon_\alpha = 0\ (\alpha \gtrless i)$, $\varepsilon_i = 1$ ist, so sind nach der Methode der Variation der Konstanten die Lösungen von (3.) (s. Abh. Bd. 131 Nr. 5):

$$(5.)\qquad \begin{cases} y = \sum_{i=1}^{m} \left\{ y_1 \int \frac{L_{i1} X_i}{\Delta} dx + \dots + y_m \int \frac{L_{im} X_i}{\Delta} dx \right\}, \\ u = \sum_{i=1}^{m} \left\{ u_1 \int \frac{L_{i1} X_i}{\Delta} dx + \dots + u_m \int \frac{L_{im} X_i}{\Delta} dx \right\}, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z = \sum_{i=1}^{m} \left\{ z_1 \int \frac{L_{i1} X_i}{\Delta} dx + \dots + z_m \int \frac{L_{im} X_i}{\Delta} dx \right\}, \end{cases}$$

wobei zu den Integralen beliebige Konstanten addiert werden.

C) In einem Kreise, in welchem die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) einwertige und stetige analytische Funktionen sind, besteht ein Fundamentalsystem von m Lösungen des Systems Nr. 1 (1.), welche dort einwertige und stetige analytische Funktionen sind (vergl. Abhdlg. Bd. 131 Nr. 4 II A.).

II. Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) seien rationale Funktionen von x.

A) Die Funktion y aus irgend einer Lösung der simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) genügt der Differentialgleichung Nr. 1 (16.). In derselben Weise wie für y kann für jede der Variablen u bis z die der Differentialgleichung Nr. 1 (16.) entsprechende aufgestellt werden.

Es werde ein ganzer rationaler Ausdruck nullten oder höheren Grades von $\log(x-a)$ mit Faktoren der Logarithmenpotenzen, die Potenzreihen in bezug auf $x-a$ sind, in welchen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen von einem Werte ϱ unterscheiden, zur Abkürzung ein kanonischer Ausdruck genannt, ϱ der Gruppenexponent.

Ein Integral der Differentialgleichung für y Nr. 1 (16.) bei einem Punkte $x=a$ ist eine homogene lineare Verbindung mit konstanten Koeffizienten von kanonischen Ausdrücken; entsprechend bei u bis z.

Wenn nun bei einem singulären Punkte $x=a$ des Systems Nr. 1 (1.) (vergl. Abhdlg. Bd. 131, Nr. 4 II B) in einem durch $x=a$ gelegten Kreise, innerhalb dessen die Koeffizienten a_{rs} (Nr. 1 (2.)) einwertig und stetig sind, ein Fundamentalsystem von m Lösungen des Systemes Nr. 1 (1.) genommen wird, so stellen sich in jeder dieser Lösungen die Funktionen y bis z in der Umgebung von a als homogene lineare Verbindungen mit konstanten Koeffizienten von kanonischen Ausdrücken dar. Der einzelne Faktor einer Logarithmenpotenz in einem solchen Ausdrucke hat die Form $(x-a)^{\varrho}\,\varphi(x)$. Die Funktion $\varphi(x)$ bleibt in einem einfach zusammenhängenden Gebiete, welches außer $x=a$ keinen singulären Punkt des Systems Nr. 1 (1.) enthält, abgesehen von $x=a$ einwertig und stetig. Denn wenn in der einzelnen Differentialgleichung, wie Nr. 1 (16.) für y, in diesem Gebiete noch andere singuläre Punkte vorkommen, so können dieselben dort nur außerwesentlich singuläre sein, wie aus dem Zusammenhange der Gleichungen Nr. 1 (16.), (17.), (18.) mit dem Systeme Nr. 1 (1.) nach dem in I C) Gesagten sich ergibt. Nun kommen die linearen Relationen zwischen den Faktoren der Logarithmenpotenzen in Betracht (vgl. Abh. Bd. 96 S. 187).

B) Wird eine der vorhin genannten m Lösungen des Fundamentalsystems in die Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) eingesetzt, so ergibt sich, daß auch jeder Teil dieser Lösung, in welchem der Gruppenexponent bei den Funktionen y, u bis z ein und derselbe ist, für sich eine Lösung bildet; dabei können einzelne, aber nicht alle Funktionen y, u bis z gleich Null sein (Abh. Bd. 74, Nr. 1 (5.) dieses Journals).

In einer Lösung, in welcher ein und derselbe Gruppenexponent vorkommt, sei die höchste Logarithmenpotenz, welche mit nicht verschwindendem Faktor auftritt, die n-te, $n \geqq 0$, wobei dieselbe in einigen, aber nicht in allen Funktionen y, u bis z mit dem Faktor Null sich vorfinden kann. Dann ergibt sich weiter aus dem System Nr. 1 (1.), da die Faktoren gleich hoher Logarithmenpotenzen auf beiden Seiten übereinstimmen müssen, daß die Faktoren der n-ten Logarithmenpotenz für sich eine Lösung des Systems Nr. 1 (1.) bilden (vgl. Abh. Bd. 74 Nr. 2).

Nun werden aus dem angenommenen Fundamentalsystem bei jedem Gruppenexponenten die sich ergebenden linear unabhängigen Lösungen herausgenommen, darunter wenigstens eine ohne Logarithmen.

Dann ist durch die Gesamtheit dieser Lösungen linear und homogen mit konstanten Koeffizienten jede beliebige Lösung darstellbar. Dieselben sind m linear unabhängige Lösungen und bilden ein Fundamentalsystem, da diese Lösungen sukzessive durch die m Lösungen des ursprünglichen Fundamentalsystems zur Darstellung jeder beliebigen Lösung ersetzt werden können.

Bei $x = \infty$ tritt $\frac{1}{x} = t$, $t = 0$ ein, wodurch man auf dasselbe Resultat kommt.

III. Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) sollen x und die irreduktible ganze algebraische Funktion S rational enthalten.

Dann wird bei einem R-blättrigen Windungspunkte $x = a$ $(R \geqq 1)$ $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ (bez. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{R}} = \zeta$) gesetzt und in einem durch $\zeta = 0$ gehenden Kreise, innerhalb dessen die Koeffizienten a_{rs} einwertig und stetig sind, ein von ζ abhängendes Fundamentalsystem genommen, wie in II. A). Hieraus erhält man durch dieselben Betrachtungen wie in II. für die Umgebung von $\zeta = 0$ ein Fundamentalsystem von Integralen durch kanonische Ausdrücke von den in II. A) und B) angegebenen Eigenschaften. In diese ist dann für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ einzuführen.

3.

Die einzelnen homogenen linearen Differentialgleichungen, auf welche die Integration von simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen zurückkommt.

I. Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) sollen rationale Funktionen von x sein.

A) Die Integrale des Systems Nr. 1 (1.), deren Form bei den singulären Punkten in Nr. 2 gegeben ist, seien regulär. Dann ist die Differentialgleichung Nr. 1 (16.) eine reguläre Differentialgleichung und die Integrale t bis z aus dem Systeme simultaner homogener linearer Differentialgleichungen Nr. 1 (24.) sind regulär.

Und umgekehrt: die Integrale der Differentialgleichung Nr. 1 (16.) und des Systemes Nr. 1 (24.) seien regulär. Dann ergeben sich die Integrale aus dem Systeme simultaner nichthomogener linearer Differentialgleichungen Nr. 1 (18.) gleichfalls als regulär, wie aus dem in Nr. 2 I. Gesagten hervorgeht. Es sind dann auch die Ausdrücke Nr. 1 (17.) für u bis s regulär. Demnach sind alle Integrale des Systems Nr. 1 (1.) regulär.

Um daher zu prüfen, ob die Integrale des Systems Nr. 1 (1.) regulär sind, ist zunächst die Differentialgleichung für y Nr. 1 (16.) zu ermitteln und zuzusehen, ob dieselbe regulär ist. Dann ist das System Nr. 1 (24.) aufzustellen und dieses in derselben Weise zu behandeln, also zunächst aus demselben die Differentialgleichung für t herzustellen und diese in bezug auf die Regularität zu prüfen; u. s. w.

B) Der Differentialausdruck in der Differentialgleichung Nr. 1 (16.) sei durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar. In derselben Weise, wie aus dem System Nr. 1 (1.) die Differentialgleichung für y Nr. 1 (16.) hergeleitet ist, seien die entsprechenden Differentialgleichungen für u bis z hergestellt. Es sei der Differentialausdruck in jeder dieser Differentialgleichungen durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar.

Wenn in einer Differentialgleichung $\Phi(y,x)=0$, in welcher $\Phi(y,x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung $\Psi(y,x)=0$ mit rationalen Koeffizienten und dem Koeffizienten der höchsten Ableitung gleich 1 enthalten sind, so ist auch $\Psi(y,x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar mit determinierenden Faktoren aus dem Systeme $\Phi(y,x)$ (Abhdlg. Bd. 96, Nr. 221, 222).

Aus der Voraussetzung folgt daher, wenn man aus dem Systeme Nr. 1 (24.) die Differentialgleichung für t herleitet, daß auch deren Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist. Überhaupt ergibt sich, in welcher Reihenfolge auch in bezug auf die Variablen y, u bis z die Reduktion des Systemes Nr. 1 (1.) nach dem in Nr. 1 an-

gegebenen Verfahren vorgenommen wird, daß man immer auf solche einzelnen homogenen linearen Differentialgleichungen kommt, bei denen der Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist.

Falls in Nr. 1 (16.) $\lambda = m$ ist und der Differentialausdruck in Nr. 1 (16.) durch ein System normaler Differentialausdrücke sich darstellen läßt, so folgt hieraus, daß die Voraussetzung erfüllt ist. Denn nun ergeben sich die übrigen Variablen u bis z durch die Ausdrücke Nr. 1 (17.), in welchen nur y, nicht t bis z vorkommt. Aus einem solchen Ausdruck läßt sich aber für jede dieser Variablen, z. B. für u, eine Differentialgleichung $L(u) = 0$, welcher die Funktion u genügt, herleiten, worin $L(u)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, woraus nach dem vorhin Gesagten die Behauptung hervorgeht. Für die Herstellung von $L(u)$ aus dem Ausdrucke Nr. 1 (17.) für u kommt folgendes in Betracht. Wenn aus einer homogenen linearen Differentialgleichung für y $M(y, x) = 0$ diejenige hergeleitet wird, welche die erste Ableitung der Integrale und nur diese zu Integralen hat, so ist deren Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, wenn dies bei $M(y, x)$ der Fall war (vergl. Abhdlg. Bd. 119, S. 147). Für ein Produkt $Y = Ry$, wo R eine rationale Funktion von x, erhält man die Differentialgleichung $RM(R^{-1}Y, x) = 0$, worin $RM(R^{-1}Y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist. Für die Summe $y_1 + y_2 = Y$, wo $\Phi(y_1, x) = 0$ und $\Psi(y_2, x) = 0$ ist, Φ und Ψ durch Systeme normaler Differentialausdrücke sich darstellen lassen, ergibt sich eine Differentialgleichung $X(Y, x) = 0$, in welcher X durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist (Abhdlg. Bd. 96, S. 216, 222).

II. Die Koeffizienten a_{rs} Nr. 1 (2.) sollen rational x und die irreduktible ganze algebraische Funktion S enthalten.

Dann gilt das in I. A) über ein System Nr. 1 (1.) mit regulären Integralen Gesagte ebenso, indem bei einem R-blättrigen Windungspunkte a $(R \geqq 1)$ $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ gesetzt wird.

Das in I. B) Gesagte gilt gleichfalls für Systeme im Bereiche S normaler Differentialausdrücke (Abhdlg. Bd. 122, Nr. 1) und auch für Systeme verallgemeinerter im Bereiche S normaler Differentialausdrücke (Abhdlg. Bd. 123, Nr. 1, 2, 3).

III. Bei der Reduktion des Systemes Nr. 1 (1.) nach dem in Nr. 1 angegebenen Verfahren werden die eingehenden einzelnen Differential-

gleichungen vor jeder Integration bekannt. Je nachdem die Reihenfolge der Variablen y, u bis z bei dieser Reduktion gewählt wird, werden die eingehenden einzelnen Differentialgleichungen verschieden, und dieses kann besonders in bezug auf die Ordnung der Differentialgleichungen der Fall sein. Man wird daher zusehen, bei welcher Reihenfolge die Integration der eingehenden einzelnen Differentialgleichungen sich am einfachsten gestaltet.

4.

Die Integrale der simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen.

I. Die Differentialgleichung Nr. 1 (16.) habe die λ linear unabhängigen Integrale $y_\varrho (\varrho = 1, \dots \lambda)$.

y_ϱ wird in das System Nr. 1 (18.) eingesetzt. Dann sei eine Lösung dieses Systems (vgl. Nr. 2 I) t_ϱ bis z_ϱ. $y_{\lambda+\varrho}$ werde gleich Null gesetzt. Ein Fundamentalsystem von $m-\lambda$ Lösungen des Systems Nr. 1 (24.) sei $t_{\lambda+\varrho}$ bis $z_{\lambda+\varrho}$ $(\varrho = 1, \dots m-\lambda)$. Die zusammengehörigen Werte y_k, t_k bis z^k $(k = 1, \dots m)$ werden in Nr. 1 (17.) eingesetzt; so ergeben sich u_k bis s_k. Dann ist nach Nr. 1 durch

$$(1.) \qquad y = \sum_1^m c_k y_k, \quad u = \sum_1^m c_k u_k, \dots z = \sum_1^m c_k z_k,$$

wo die c_k Konstanten sind, die vollständige Lösung des Systemes Nr. 1 (1.) gegeben. Hieraus folgt, wie in Nr. 2 II. B) (Schluß), daß diese m Lösungen linear unabhängig sind. Dasselbe ergibt sich direkt.

II. A) Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) seien rational.

Bei einem singulären Punkte $x = a$ des Systemes Nr. 1 (1.) sei von dem Systeme Nr. 1 (24.) ein Fundamentalsystem von $m-\lambda$ Lösungen unter der in Nr. 2 II B) angegebenen Form aufgestellt, so daß in der einzelnen Lösung ein und derselbe Gruppenexponent besteht und unter den Lösungen mit demselben Gruppenexponenten eine ohne Logarithmen ist.

Aus der Differentialgleichung für y Nr. 1 (16.) mögen α linear unabhängige Integrale mit einem und demselben Gruppenexponenten r hervorgehen. Diese werden in das System Nr. 1 (18.) eingesetzt und bei der Integration nach der Formel Nr. 2 (5.) wird in der Entwicklung der durch das Integralzeichen ausgedrückten Funktionen das konstante Glied annulliert. Hierdurch entstehen α Lösungen des Systems Nr. 1 (18.) mit dem Gruppenexponenten r. Die zusammengehörigen Werte y, t bis z werden

in Nr. 1 (17.) eingesetzt. Auf diese Weise ergeben sich im ganzen α Lösungen des Systems Nr. 1 (1.) mit dem Gruppenexponenten r.

Das für das System Nr. 1 (24.) aufgestellte Fundamentalsystem von Lösungen enthalte β ($\beta \geqq 0$) linear unabhängige Lösungen mit dem Gruppenexponenten r. Dieselben werden bei $y=0$ in Nr. 1 (17.) eingesetzt. Für das System Nr. 1 (1.) erfolgen β Lösungen mit dem Gruppenexponenten r. Im ganzen gehen dadurch $\alpha+\beta$ linear unabhängige Lösungen (vgl. I.) des Systemes Nr. 1 (1.) mit dem Gruppenexponenten r hervor.

Ist β von Null verschieden, so ist unter denselben bei $y=0$ bereits eine ohne Logarithmen. Ist $\beta=0$, so soll unter den α Integralen y von Nr. 1 (16.) mit dem Gruppenexponenten r eines ohne Logarithmen sein. Diesem entspricht nach dem Vorhergehenden eine Lösung des Systems Nr. 1 (1.) mit dem Gruppenexponenten r, und diese Lösung ist gleichfalls ohne Logarithmen. Denn sonst ergäbe die höchste Logarithmenpotenz in dieser Lösung mit nicht in allen Funktionen y, u bis z verschwindenden Faktoren durch diese Faktoren für sich eine Lösung (Nr. 2 II. B)) mit $y=0$, dann wäre nicht $\beta=0$.

Durch sukzessive Anwendung dieses Verfahrens ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen des Systems Nr. 1 (1.) mit demselben Gruppenexponenten und darunter eine ohne Logarithmen.

Bei $x=\infty$ erhält man dasselbe nach Substitution von $x=\frac{1}{t}$.

B) Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) sollen rationale Ausdrücke von x und der irreduktiblen ganzen algebraischen Funktion S sein. Dann wird bei einem R-blättrigen ($R \geqq 1$) Windungspunkte $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$ gesetzt in Nr. 1 (16.), (17.), (18.), (24.), worauf sich dasselbe Resultat wie vorhin ergibt.

III. Zur Darstellung der Integrale und der Substitutionen bei der Fortsetzung.

A) Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) seien rational.

Bei der Integration des Systemes Nr. 1 (18.) nach der Methode der Variation der Konstanten (Nr. 2 I) gilt über die Entwicklung der Integrale, die Fortsetzung durch Umgang um $x=a$, die allgemeine Fortsetzung und die Wertberechnung das in Abhdlg. Bd. 131 Nr. 5 I. B) über simultane nichthomogene lineare Differentialgleichungen Gesagte. —

Bei den Integralen y der Differentialgleichung Nr. 1 (16.) (entsprechend für u bis z) erhält man für die Koeffizienten in den eingehenden

Potenzreihen Rekursionsformeln mit konstanter Anzahl der Glieder, indem die Differentialgleichung Nr. 1 (16.) nach den Angaben in Abhdlg. Bd. 96 Nr. 15 behandelt wird. Über das Vorkommen von Logarithmen bei den Integralen y vgl. Abhdlg. Bd. 96 S. 242, 267 a); Bd. 119 S. 142.

B) Die Koeffizienten a_{rs} enthalten die algebraische Funktion S.

Bei einem R-blättrigen Windungspunkte $x=a$ wird $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$ gesetzt. Die Behandlung des Systemes Nr. 1 (18.) geschieht nach den Angaben in Abhdlg. Bd. 131 Nr. 5 I. B), C). Dabei werde, was den Umgang um $\zeta=0$ angeht noch folgendes bemerkt. In den Ausdrücken in Nr. 1 (19.), (20.) sind die Koeffizienten $b_{r\varkappa}$, $c_{r\varkappa}$ bei $\zeta=0$ einwertig. Bei den Integralen y sei eine Gruppe mit demselben Gruppenexponenten y_1, y_2 bis y_σ. y_α geht bei einem Umgange um $\zeta=0$ über in

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_\sigma y_\sigma, \tag{2.}$$

wo die k Konstanten sind. Wird y_α in Nr. 1 (20.) eingesetzt, so sei der dadurch entstehende Ausdruck durch $Y_{r\alpha}$ bezeichnet. Dann geht durch denselben Umgang $Y_{r\alpha}$ über in

$$k_1 Y_{r1} + k_2 Y_{r2} + \cdots + k_\sigma Y_{r\sigma}. \tag{3.}$$

Für die Koeffizienten in den nach Potenzen von ζ fortschreitenden Potenzreihen in den Entwicklungen erhält man bei y (entsprechend bei u bis z) Rekursionsformeln mit konstanter Anzahl der Glieder, wenn man zu der Differentialgleichung Nr. 1 (16.) die Konnexdifferentialgleichung herleitet (vgl. Abhdlg. Bd. 122 S. 27), in diese $x-a=\zeta^R$ einführt und dann dieselbe nach den Angaben in Abhdlg. Bd. 96 Nr. 15 behandelt.

5.

Die simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen.

Die m simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen

$$\text{(1.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1 + X_1, \\ \dfrac{du}{dx} = f_2 + X_2, \\ \vdots \\ \dfrac{dz}{dx} = f_m + X_m \end{cases}$$

seien vorgelegt, worin die f die Ausdrücke Nr. 1 (2.) sind, über die X wie in Abhdlg. Bd. 131 Nr. 5 die Voraussetzungen aus Abhdlg. Bd. 107 gemacht werden. Hier ist zunächst das System Nr. 1 (1.) zu integrieren. Alsdann wird die Methode der Variation der Konstanten angewandt. Das weitere Verfahren ist in Abhdlg. Bd. 131 Nr. 5 I angegeben; wenn die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (2.) rational sind a. a. O. in I. A), B), wenn dieselben rational x und die algebraische Funktion S enthalten, a. a. O. in I A), C).

Die in die Entwicklung der Integrale y (entsprechend bei u bis z) eingehenden Potenzreihen enthalten Koeffizienten, für welche Rekursionsformeln mit konstanter Anzahl der Glieder in folgender Weise hergeleitet werden können. Das in Abhdlg. Bd. 131 Nr. 5 II. beschriebene Verfahren werde auf die λ ersten Gleichungen Nr. 1 (3.) bis (6.) angewandt; so erhält man für y die Differentialgleichung

$$F_\lambda(y, x) = q, \tag{2.}$$

worin $F_\lambda(y, x)$ der Differentialausdruck in Nr. 1 (16.) ist, q sich linear und homogen aus X_1 bis X_m in (1.) und Ableitungen dieser Funktionen zusammensetzt mit Koeffizienten, die rationale Ausdrücke der a_{rs} Nr. 1 (2.) und deren Ableitungen sind.

Gemäß Abhdlg. Bd. 115 S. 137, 138 können für die X in (1.) homogene lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten hergeleitet werden, welchen dieselben genügen; daher aus diesen auch solche Differentialgleichungen für die Ableitungen der X. Dann wird für q eine homogene lineare Differentialgleichung hergeleitet mit Koeffizienten, die rational in x bezüglich in x und der algebraischen Funktion S sind (Abhdlg. Bd. 96 Nr. 7, Bd. 122 Nr. 1 I.). In diese wird $F(y, x)$ eingesetzt. Das weitere Verfahren ist wie in Nr. 4 III.

Schlufsbemerkung

in betreff der von dem Verfasser in diesem Journal veröffentlichten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Um in Kürze einen Auszug aus dem Inhalte der in diesem Journal vom 74. Bande an in bezug auf lineare Differentialgleichungen erschienenen Abhandlungen des Verfassers zu verschaffen und um die weitere Kenntnisnahme dieser Arbeiten zu vereinfachen, wird folgende Reihenfolge für die Lektüre angegeben:

1. Bemerkung Bd. 126 S. 71. Einleitung zu der Abhandlung Bd. 131 S. 8 und zu der vorstehenden Abhandlung.

2. Einleitung zu der Übersicht Bd. 96. Rückblick in der Abhandlung Bd. 122 S. 20 und in der Abhandlung Bd. 123 S. 134.

3. Abhandlungen Bd. 74, 75, 78 Nr. 1. Übersicht Bd. 96. Abhandlungen Bd. 117, Bd. 115 erste Abteilung.

Für das Übrige ist der Wegweiser in dem Vorhergehenden enthalten.

Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen.

Mit 14 Figuren.

Von Herrn *J. Horn* in Clausthal.

Im 4. Bd. des Arch. der Math. u. Phys. (3. Reihe), S. 213–230, habe ich vermittels sukzessiver Annäherungen*) eine Reihenentwicklung der Integrale der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right)\frac{dy}{dx}+\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)y=0$$

hergeleitet, aus welcher sich das Verhalten der Integrale bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Unbestimmtheitsstelle $x=\infty$ ergibt, und zwar zunächst die asymptotische Darstellung der Integrale durch die im allgemeinen divergenten *Thomé*schen Normalreihen.**)

Dieses Verfahren läßt verschiedene Abänderungen zu, es kann zur Restabschätzung benutzt werden und ist der Verallgemeinerung fähig.

Die Koeffizienten $P_1,\ldots P_m$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^my}{dx^m}+x^k\,P_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+x^{2k}\,P_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+x^{(m-1)k}\,P_{m-1}\frac{dy}{dx}+x^{mk}\,P_m\,y=0$$

seien in Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ entwickelbar, welche in der Umgebung von $x=\infty$ konvergieren; die positive ganze Zahl $k+1$ heißt nach *Poincaré* der Rang der Differentialgleichung an der singulären Stelle der Unbestimmtheit

*) Vgl. *Fuchs*, Annali di Mat. 1870.

**) Vgl. auch Comptes rendus, 17. Jan. 1898.

$x=\infty$. Im Anschluß an *Poincaré**) habe ich das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung mit *rationalen* Koeffizienten in der ganzen Umgebung der Unbestimmtheitsstelle weiter verfolgt, und zwar in den Fällen $k=0$**) und $m=2$.***) Wenn die Koeffizienten $P_1, \ldots P_m$ nicht in der ganzen Ebene rational sind, ist die Methode der *Laplace*schen Transformation nicht anwendbar.†) Besonders geeignet zur vollständigen Untersuchung der Integrale ist aber die Methode der sukzessiven Annäherungen, wie sich in dem a. a. O. behandelten einfachsten Falle $m=2$, $k=0$ gezeigt hat. Wir wollen daher, um eine Grundlage für weitere Untersuchungen zu haben, diese Methode so ausgestalten, daß ihre Anwendung auf die oben angeschriebene allgemeine Differentialgleichung ersichtlich wird.

In §§ 1—4 wird der einfachste Fall $m=2$, $k=0$ nach einer abgeänderten Methode behandelt, welche ohne weiteres zur Restabschätzung führt. Die Ausdehnung dieser Methode auf Differentialgleichungen höherer Ordnung vom Rang 1 wird in §§ 5—8 für den Fall $m=3$, $k=0$ dargestellt.

Für Differentialgleichungen höheren Ranges ($k \geqq 1$) wird eine auf der Benutzung anderer Integrationswege beruhende Methode angegeben. Der einfacheren Darstellung halber beschränken wir uns in §§ 9—13 auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung von beliebigem Rang.

§ 1.

Die Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0$$

habe die in der Umgebung von $x=\infty$ regulären Koeffizienten

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \cdots. \qquad (i=1, 2)$$

---

*) Amer. Journ. Bd. 7; Act. math. Bd. 8.

**) Math. Ann. Bd. 49, 50.

***) Act. math. Bd. 23.

†) Vgl. meine Arbeiten im 118. Bd. dieses Journals und im 24. Bd. der Act. math., sowie die Arbeiten von *Kneser* (dieses Journ. Bd. 116, 117, 120; Math. Ann. Bd. 49), an welche sich die Dissertation von *A. Hamburger* (Über die Restabschätzung bei asymptotischen Darstellungen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Berlin 1905) anschließt.

Wenn *die Wurzeln* α_1, α_2 *der charakteristischen Gleichung*

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$$

von einander verschieden sind, wird die Differentialgleichung (A) durch die *Thomé*schen Normalreihen

$$S_i = e^{\alpha_i x}\, x^{\varrho_i}\left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (i = 1, 2)$$

befriedigt, worin

$$\varrho_i = -\frac{a_1' \alpha_i + a_2'}{2\,\alpha_i + a_1} \qquad (i = 1, 2)$$

ist.

Wir verstehen unter n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ und führen die ganzen Funktionen n-ten Grades von $\frac{1}{x}$ ein:

$$\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{A_{i1}}{x} + \cdots + \frac{A_{in}}{x^n}. \qquad (i = 1, 2)$$

Die Funktionen

$$\varphi_i = e^{\alpha_i x}\, x^{\varrho_i}\, \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (i = 1, 2)$$

genügen der Differentialgleichung

$$D_1(y) = 0,$$

wo

$$D_1(y) = \frac{\begin{vmatrix} y, & \varphi_1, \varphi_2 \\ y', & \varphi_1', \varphi_2' \\ y'', & \varphi_1'', \varphi_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1, \varphi_2 \\ \varphi_1', \varphi_2' \end{vmatrix}} = y'' + p_1 y' + p_2 y$$

ist. Setzt man

$$D(y) = y'' + P_1 y' + P_2 y$$

und

$$D_2(y) = D_1(y) - D(y) = (p_1 - P_1) y' + (p_2 - P_2) y,$$

so schreibt sich die Differentialgleichung (A):

$$D_1(y) = D_2(y).$$

Schreibt man

$$D(S_i) = e^{\alpha_i x}\, x^{\varrho_i}\left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots\right),$$

so dient die Gleichung $C_1 = 0$ nach Annahme einer bestimmten Wurzel α_i der Gleichung $C_0 = \alpha_i^2 + a_1 \alpha_i + a_2 = 0$ zur Bestimmung von ϱ_i; hierauf ergibt sich A_{i1} aus $C_2 = 0, \ldots$ A_{in} aus $C_{n+1} = 0$. Die von $A_{i,n+1}, A_{i,n+2}, \ldots$ nicht abhängenden Größen $C_0, C_1, \ldots C_{n+1}$ bleiben gleich Null, wenn man $A_{i,n+1}, A_{i,n+2}, \ldots$ durch

Null, also S_i durch φ_i ersetzt. Es ist also

$$D(\varphi_i) = -e^{a_i x}\, x^{\varrho_i - n - 2}\, \mathfrak{q}_i\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

wo $\mathfrak{q}_i$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Wegen

$$D_1(\varphi_i) = 0$$

hat man

$$D_2(\varphi_i) = (p_1 - P_1)\,\varphi_i' + (p_2 - P_2)\,\varphi_i = e^{a_i x}\, x^{\varrho_i - n - 2}\, \mathfrak{q}_i\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad (i=1,2)$$

daraus folgt

$$p_1 - P_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{x^{n+2}},\quad p_2 - P_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{x^{n+2}},$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind. Man hat also

$$D_2(y) = x^{-n-2}\,\mathfrak{P}_1\, y' + x^{-n-2}\,\mathfrak{P}_2\, y.$$

Wir setzen

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi_1', & \varphi_2' \end{vmatrix} = e^{(a_1+a_2)x}\, x^{\varrho_1+\varrho_2}\, \Phi\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

wo Φ eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{x}$ darstellt, und

$$\Delta_1 = -\varphi_2,\quad \Delta_2 = \varphi_1.$$

Dann ist

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-a_i x}\, x^{-\varrho_i}\, \mathfrak{p}_i\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad (i=1,2)$$

wo $\mathfrak{p}_i$ eine in der Umgebung von $x=\infty$ konvergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt.

Die positive Größe R sei so groß angenommen, daß sich in dem Gebiet $|x| \geqq R$ nicht nur P_1, P_2 regulär verhalten, sondern auch Φ von Null verschieden ist; dann sind auch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ für $|x| \geqq R$ regulär.

Wir verstehen unter u_0 eine der Funktionen φ_1, φ_2 und schreiben die Gleichungen

$$D_1(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

an, woraus wir nach einander $u_1, u_2, u_3, \ldots$ berechnen. Wenn u_ν bekannt ist, erhält man $u_{\nu+1}$ durch Integration einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Form

$$u_{\nu+1} = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i \int_l D_2(u_\nu) \frac{\Delta_i}{\Delta} dx;$$

wir wählen einen Integrationsweg l, welcher in einer passenden Richtung aus dem Unendlichen kommt und in x endigt. Weiter ist

$$D_2(u_{\nu+1}) = \sum_{i=1}^{2} D_2(\varphi_i) \int_l D_2(u_\nu) \frac{\Delta_i}{\Delta} dx.$$

Durch eine Substitution von der Form $y = e^{ax} y_1$, $x = b x_1$ können wir erreichen, daß α_1, α_2 beliebig gegebene (von einander verschiedene) Werte annehmen; *wir setzen demgemäß* $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ *als reell und positiv voraus.*

§ 2.

Es sei zunächst

$$u_0 = \varphi_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \Phi_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dann ist

$$D_2(u_0) = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1 - n - 2} F_0(x),$$

wo

$$F_0(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

für $|x| \geqq R$ regulär ist. Unter Anwendung der Bezeichnung

$$D_2(u_\nu) = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1 - n - 2} F_\nu(x)$$

haben wir die Rekursionsformeln

$$u_{\nu+1} e^{-\alpha_1 x} x^{-\varrho_1} = \Phi_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_l x^{-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx + e^{\beta x} x^{\sigma} \Phi_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_l e^{-\beta x} x^{-\sigma-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

und

$$F_{\nu+1}(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_l x^{-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx + e^{\beta x} x^{\sigma} \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_l e^{-\beta x} x^{-\sigma-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

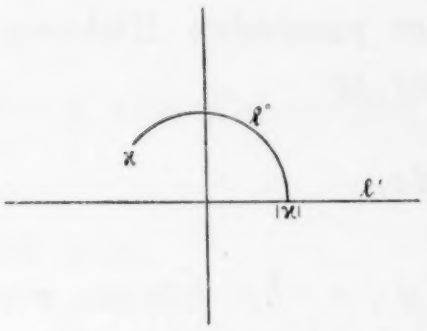
worin

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \sigma = \varrho_2 - \varrho_1$$

gesetzt ist.

Die Veränderliche x beschränken wir auf das Gebiet $\mathfrak{G}_1$

$$|x| \geqq R, \quad -\pi \leqq \arg x \leqq \pi.$$



Figur 1.

Der Integrationsweg l setze sich zusammen aus der Geraden l', welche längs der reellen positiven Achse aus dem Unendlichen kommt und im Punkte $|x|$ endigt, und aus dem Kreisbogen l'' vom Mittelpunkt 0 und vom Zentriwinkel $\leqq \pi$, welcher die Punkte $|x|$ und x verbindet. (Fig. 1.)

Für alle Punkte x des Gebietes $\mathfrak{G}_1$ ist

$$L_x = \int_l \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}}, \quad K = \pi + \frac{1}{n+1}.$$

Es ist nämlich

$$\int_{l'} \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| = \int_{|x|}^{\infty} \frac{dv}{v^{n+2}} = \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{|x|^{n+1}},$$

$$\int_{l''} \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| = \int_{|\arg x|}^{\pi} \frac{|x|\,d\vartheta}{|x|^{n+2}} \leqq \frac{\pi}{|x|^{n+1}}.$$

Wir setzen

$$\psi = e^{\beta(x-v)}\, x^{\sigma}\, v^{-\sigma},$$

wo x ein beliebiger Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}_1$ und v ein beliebiger Punkt des in x endigenden Weges l ist. Dann ist, wie wir zeigen werden,

$$|\psi| \leqq H, \quad H = \left[e^{\pi}\left(1 + \frac{|\sigma|}{\beta R e}\right)\right]^{|\sigma|}.$$

Es ist $\Re(x) \leqq \Re(v)$, also

$$|e^{\beta(x-v)}| \leqq 1.$$

Auf dem Wege l ist

$$\left|\frac{v}{x}\right| \geqq 1, \quad \left|\arg \frac{v}{x}\right| \leqq \pi.$$

Wenn man

$$\sigma = \sigma' + i\,\sigma''$$

setzt, hat man

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| = \left|\frac{v}{x}\right|^{-\sigma'} e^{\sigma'' \arg \frac{v}{x}} \leqq \left|\frac{v}{x}\right|^{-\sigma'} e^{\pi|\sigma''|}.$$

Ist $\sigma' \geqq 0$, so ist

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| \leqq e^{\pi |\sigma''|},$$

also

$$|\psi| \leqq H,\ H = e^{\pi |\sigma''|}.$$

Um den Fall $\sigma' \leqq 0$ zu behandeln, nehmen wir s reell und größer als 1 an und zerlegen den Weg l in die beiden Teile $v > s|x|$ und $|v| \leqq s|x|$, die wir bzw. l_1 und l_2 nennen. Auf l_2 ist

$$\left|\frac{v}{x}\right| \leqq s,$$

also

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| \leqq s^{|\sigma'|}\, e^{\pi |\sigma''|}$$

und

$$|\psi| \leqq H_2,\ H_2 = s^{|\sigma'|}\, e^{\pi |\sigma''|}.$$

Auf l_1 ist

$$|x| < \frac{v}{s},$$

also

$$|e^{\beta(x-v)}| \leqq e^{\beta(|x|-v)} < e^{\beta\left(\frac{v}{s}-v\right)} = e^{-\beta\left(1-\frac{1}{s}\right)v};$$

ferner ist

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| \leqq \left(\frac{v}{R}\right)^{|\sigma'|} e^{\pi |\sigma''|},$$

folglich

$$|\psi| \leqq \frac{e^{\pi |\sigma''|}}{R^{|\sigma'|}}\, e^{-\beta\left(1-\frac{1}{s}\right)v}\, v^{|\sigma'|}$$

oder, da

$$e^{-\beta\left(1-\frac{1}{s}\right)v} v^{|\sigma'|}$$

für reelle positive v höchstens gleich

$$\left(\frac{|\sigma'|}{\beta e\left(1-\frac{1}{s}\right)}\right)^{|\sigma'|}$$

ist,

$$|\psi| \leqq H_1,\ H_1 = \left(\frac{|\sigma'|}{\beta R e\left(1-\frac{1}{s}\right)}\right)^{|\sigma'|} e^{\pi |\sigma''|}.$$

Für

$$s = 1 + \frac{|\sigma'|}{\beta R e}$$

ist

$$H_1 = H_2 = H,$$

$$H = e^{\pi |\sigma''|} \left(1 + \frac{|\sigma'|}{\beta R e}\right)^{|\sigma'|}.$$

Versteht man unter s die angegebene Zahl, so hat man

$$|\psi| \leqq H.$$

An Stelle der für $\sigma' \geqq 0$ und für $\sigma' \leqq 0$ gefundenen Werte von H kann der oben angegebene größere Wert gesetzt werden.

Für $|x| \geqq R$ sei

$$\left|\mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq M, \quad \left|\mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq N, \quad \left|\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq \mathfrak{N},$$

wo $M, N, \mathfrak{N}$ endliche positive Größen sind; es ist also auch

$$|F_0(x)| \leqq N.$$

Im Gebiete $\mathfrak{G}_1$ ist

$$|F_\nu(x)| \leqq N \frac{(MN(1+H)L_x)^\nu}{\nu!};$$

denn, wenn dies richtig ist, ergibt sich, da der ganze Integrationsweg l im Gebiete $\mathfrak{G}_1$ verläuft, aus der Formel

$$F_{\nu+1}(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_l F_\nu(v)\, \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{v}\right) \frac{dv}{v^{n+2}}$$

$$+ \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_l e^{\beta(x-v)} x^\sigma v^{-\sigma} \cdot F_\nu(v)\, \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{v}\right) \frac{dv}{v^{n+2}}$$

die Ungleichung

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq MN \cdot N \frac{(MN(1+H))^\nu}{\nu!} \int_l L_v^\nu \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right|$$

$$+ MNH \cdot N \frac{(MN(1+H))^\nu}{\nu!} \int_l L_v^\nu \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right|;$$

nun ist aber

$$\left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| = dL_v,$$

also

$$\int_i L_v^{\nu} \left| \frac{d\,v}{v^{n+2}} \right| = \frac{L_x^{\nu+1}}{\nu+1}$$

und

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq N \frac{(M N (1+H) L_x)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Aus der Gleichung

$$u_{\nu+1}\, e^{-a_1 x}\, x^{-\varrho_1} = \Phi_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_i F_{\nu}(v)\, \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{v}\right) \frac{d\,v}{v^{n+2}}$$

$$+ \Phi_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_i e^{\beta(x-v)}\, x^{\sigma}\, v^{-\sigma} \cdot F_{\nu}(v)\, \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{v}\right) \frac{d\,v}{v^{n+2}}$$

folgt nun

$$|u_{\nu+1}\, e^{-a_1 x}\, x^{-\varrho_1}| \leqq \mathfrak{N} \frac{(M N (1+H) L_x)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Wenn man

$$Q = M N (1+H) K$$

setzt, so ist

$$M N (1+H) L_x \leqq \frac{Q}{|x|^{n+1}}$$

und

$$|u_{\nu}\, e^{-a_1 x}\, x^{-\varrho_1}| \leqq \mathfrak{N} \frac{\left(\frac{Q}{|x|^{n+1}}\right)^{\nu}}{\nu!}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

so daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu}\, e^{-a_1 x}\, x^{-\varrho_1}$$

im Gebiete $\mathfrak{G}_1$ unbedingt und gleichmäßig konvergiert.

Die Reihe

$$\eta_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu},$$

welche im Gebiete $\mathfrak{G}_1$ unbedingt und in jedem im Endlichen gelegenen Teil von $\mathfrak{G}_1$ gleichmäßig konvergiert, stellt ein Integral der Differentialgleichung (A) dar. Es ist nämlich

$$D_1(u_0 + u_1 + \cdots + u_{\nu+1}) = D_2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{\nu}),$$

also für $\lim \nu = \infty$, da man die Ableitungen der Reihe η_1 durch gliedweise

Differentiation erhält,

$$D_1(\eta_1) = D_2(\eta_1)$$

oder

$$D(\eta_1) = 0.$$

Setzt man

$$\eta_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right),$$

so ist im Gebiete $\mathfrak{G}_1$

$$\frac{\gamma_1}{x^{n+1}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu e^{-\alpha_1 x} x^{-\varrho_1},$$

also

$$\left|\frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right| \leqq \mathfrak{N} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{Q}{|x|^{n+1}}\right)^\nu}{\nu!}$$

oder

$$|\gamma_1| \leqq \mathfrak{N} Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} \left(\frac{Q}{|x|^{n+1}}\right)^\nu \leqq \mathfrak{N} Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} \left(\frac{Q}{R^{n+1}}\right)^\nu.$$

Demnach bleibt der absolute Betrag von γ_1 im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}_1$ unter einer endlichen Größe.

Wir wiederholen die bisherige Rechnung, indem wir mit

$$u_0 = \varphi_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\varrho_2} \Phi_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

beginnen und x auf das Gebiet $\mathfrak{G}_2$

$$|x| \geqq R, \quad 0 \leqq \arg x \leqq 2\pi$$

beschränken. Der Integrationsweg l bestehe jetzt aus einer Geraden, welche längs der negativen reellen Achse aus dem Unendlichen kommt und im Punkte $-|x|$ endigt, und aus einem die Punkte $-|x|$ und x verbindenden Kreisbogen vom Mittelpunkt 0 und vom Zentriwinkel $\leqq \pi$.

Wir haben jetzt

$$F_0(x) = \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F_{\nu+1}(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\beta x} x^{-\sigma} \int e^{\beta x} x^{\sigma-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$+ \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_l x^{-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

$$u_{\nu+1}\, e^{-a_2 x}\, x^{-\varrho_2} = \Phi_1\Big(\frac{1}{x}\Big)\, e^{-\beta x}\, x^{-\sigma} \int_l e^{\beta x}\, x^{\sigma-n-2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_1\Big(\frac{1}{x}\Big)\, dx$$
$$+ \Phi_2\Big(\frac{1}{x}\Big) \int_l x^{-n-2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_2\Big(\frac{1}{x}\Big)\, dx.$$

Im Gebiete $\mathfrak{G}_2$ ist

$$|u_\nu\, e^{-a_2 x}\, x^{-\varrho_2}| \leqq \mathfrak{N}\, \frac{\Big(\frac{Q}{|x|^{n+1}}\Big)^\nu}{\nu!}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

wo Q den früher angegebenen Wert hat. Die in $\mathfrak{G}_2$ konvergente Reihe

$$\eta_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

stellt ein zweites Integral der Differentialgleichung (A) dar.

Wenn man

$$\eta_2 = e^{a_2 x}\, x^{\varrho_2}\Big(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}}\Big)$$

setzt, so ist im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}_2$

$$|\gamma_2| \leqq \mathfrak{N} Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!}\Big(\frac{Q}{R^{n+1}}\Big)^\nu.$$

§ 3.

Wir haben bisher unter Zugrundelegung *einer festen Zahl* n zwei Integrale η_1, η_2 der Differentialgleichung (A) gefunden, welche die Darstellung

$$\eta_i = e^{a_i x}\, x^{\varrho_i}\Big(\Phi_i + \frac{\gamma_i}{x^{n+1}}\Big) \qquad (i = 1, 2)$$

zulassen, wo $|\gamma_1|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_1$

$$|x| \geqq R,\ -\pi \leqq \arg x \leqq \pi,$$

$|\gamma_2|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_2$

$$|x| \geqq R,\ 0 \leqq \arg x \leqq 2\pi$$

unter einer endlichen Größe bleibt.

Geht x längs der positiven reellen Achse ($\arg x = 0$) ins Unendliche, so ist

$$\lim \eta_1 e^{-a_1 x} x^{-\varrho_1} = 1.$$

Um zu zeigen, daß η_1 das einzige Integral von (A) mit dieser Eigenschaft ist, nehmen wir an, es sei

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2, \quad \lim y e^{-a_1 x} x^{-\varrho_1} = 1,$$

wenn x mit dem Argument 0 ins Unendliche geht. Der Ausdruck

$$y e^{-a_1 x} x^{-\varrho_1} = c_1\left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right) + c_2 e^{\beta x} x^{\sigma}\left(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}}\right)$$

kann, da β reell positiv ist, nur dann den Grenzwert 1 haben, wenn $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, also $y = \eta_1$ ist.

Ebenso zeigt man, daß η_2 das einzige Integral von (A) ist, welches die Eigenschaft

$$\lim \eta_2 e^{-a_2 x} x^{-\varrho_2} = 1$$

besitzt, wenn x längs der negativen reellen Achse ($\arg x = \pi$) ins Unendliche geht.

Daraus folgt, daß man stets dieselben Funktionen η_1, η_2 erhält, welches auch die bei ihrer Bildung benutzte Zahl n ist. Ist also n eine *beliebige* ganze positive Zahl und setzt man

$$\eta_i = e^{a_i x} x^{\varrho_i}\left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \cdots + \frac{A_{in}}{x^n} + \frac{\gamma_i}{x^{n+1}}\right), \qquad (i = 1, 2)$$

so bleibt $|\gamma_i|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_i$ endlich.

Dafür können wir sagen: *in der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ wird das Integral η_1 für $-\pi \leqq \arg x \leqq \pi$ durch die Reihe S_1, das Integral η_2 für $0 \leqq \arg x \leqq 2\pi$ durch die Reihe S_2 asymptotisch dargestellt.*

Wir setzen die zunächst für $-\pi \leqq \arg x \leqq \pi$ definierte Funktion η_1 sowohl in das Gebiet

$$\pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

als auch in das Gebiet

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq -\pi$$

fort, wo

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

ist; wir zeigen, daß die durch die Gleichung

$$\eta_1 = e^{\alpha_1 x}\, x^{\varrho_1} \left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}} \right)$$

definierte Funktion γ_1 ihrem absoluten Betrage nach im ganzen Gebiete

$$|x| \geqq R, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

unter einer (von δ abhängigen) endlichen Größe bleibt.

Es genügt, den Beweis für das Gebiet

$$\pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

zu führen, welches das Gebiet

$$-\pi \leqq \arg x \leqq -\frac{\pi}{2} - \delta$$

überdeckt. In diesem Gebiete haben wir das Fundamentalsystem

$$\bar{\eta}_i = e^{\alpha_i x}\, x^{\varrho_i} \left(\Phi_i + \frac{\bar{\gamma}_i}{x^{n+1}} \right), \qquad (i = 1, 2)$$

worin bei der Fixierung von x^{ϱ_i}

$$\pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

angenommen wird. Die Funktion

$$\bar{\gamma}_1 \text{ für } \pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

stimmt mit der Funktion

$$\gamma_1 \text{ für } -\pi \leqq \arg x \leqq -\frac{\pi}{2} - \delta$$

überein; $\bar{\gamma}_2$ ist die frühere Funktion γ_2.

Es besteht, wenn η_1 die in das Gebiet

$$\pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

fortgesetzte, in § 2 eingeführte Funktion bedeutet, eine Relation

$$\eta_1 = c_1 \bar{\eta}_1 + c_2 \bar{\eta}_2 .$$

Läßt man x mit dem Argument π ins Unendliche gehen, so ist

$$\lim \eta_1 e^{-a_1 x} x^{-\varrho_1} = 1, \quad \lim \bar{\eta}_1 e^{-a_1 x} x^{-\varrho_1} = 1,$$

$$\lim \bar{\eta}_2 e^{-a_1 x} x^{-\varrho_1} = \lim \bar{\eta}_2 e^{-a_2 x} x^{-\varrho_2} \cdot e^{\beta x} x^{\sigma} = 0,$$

also $c_1 = 1$ und demnach

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1 + c_2 \bar{\eta}_2.$$

Wir haben daher

$$\eta_1 = e^{a_1 x} x^{\varrho_1}\left(\boldsymbol{\Phi}_1 + \frac{\bar{\gamma}_1}{x^{n+1}}\right) + c_2 e^{a_1 x} x^{\varrho_1} \cdot e^{\beta x} x^{\sigma}\left(\boldsymbol{\Phi}_2 + \frac{\bar{\gamma}_2}{x^{n+1}}\right)$$

$$= e^{a_1 x} x^{\varrho_1}\left(\boldsymbol{\Phi}_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right),$$

$$\gamma_1 = \bar{\gamma}_1 + c_2 e^{\beta x} x^{\sigma} \bar{\gamma}_2;$$

$|\gamma_1|$ bleibt für

$$|x| \geqq R, \quad \pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

unter einer (von δ abhängigen) endlichen Größe, zu deren Berechnung freilich die Konstante c_2 bekannt sein müßte.

Die ursprünglich für

$$0 \leqq \arg x \leqq 2\pi$$

dargestellte Funktion η_2 denken wir uns in das größere Gebiet

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{2} - \delta$$

fortgesetzt; der absolute Betrag der durch die Gleichung

$$\eta_2 = e^{a_2 x} x^{\varrho_2}\left(\boldsymbol{\Phi}_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}}\right)$$

definierten Funktion γ_2 bleibt auch in diesem größeren Gebiete, wenn nur wie immer $|x| \geqq R$ ist, unter einer endlichen Größe.

§ 4.

In § 2 wurde die asymptotische Darstellung des Integrals η_1 durch die Reihe S_1 nur für das Gebiet

$$-\pi \leqq \arg x \leqq \pi$$

bewiesen und erst in § 3 nachträglich auf das Gebiet

$$-\frac{3\pi}{2}+\delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta$$

ausgedehnt.

Jetzt betrachten wir von vornherein das Gebiet

$$0 \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta$$

(das Gebiet

$$0 \geqq \arg x \geqq -\frac{3\pi}{2}+\delta$$

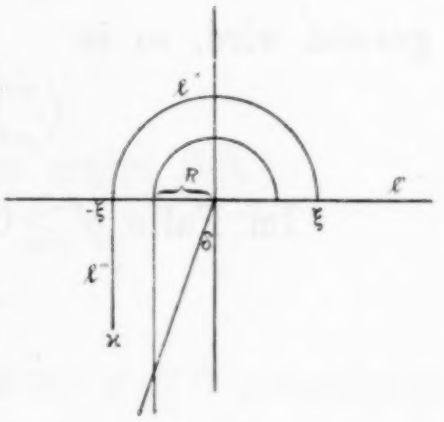
läßt sich ebenso behandeln). Unter $\mathfrak{G}$ verstehen wir das Gebiet

$$\begin{cases} |x| \geqq R \text{ für } 0 \leqq \arg x \leqq \pi, \\ \Re(x) \leqq -R \text{ für } \pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta. \end{cases}$$

Nach jedem Punkte x des Gebietes $\mathfrak{G}$ führen wir einen Integrationsweg l, welcher ganz in $\mathfrak{G}$ verläuft. Wir wählen den in § 2 beschriebenen Weg l, wenn x oberhalb der reellen Achse liegt. Wenn jedoch

$$x = -\xi - i\eta,\ \xi \geqq R,\ \eta \geqq 0$$

ist, so besteht der Weg l aus der Geraden l', welche längs der positiven reellen Achse aus dem Unendlichen kommt und im Punkte ξ endigt, aus dem Halbkreis l'' oberhalb der reellen Achse, welcher die Punkte $+\xi$ und $-\xi$ verbindet, und aus der Verbindungsgeraden l''' der Punkte $-\xi$ und $x = -\xi - i\eta$. (Fig. 2.)



Figur 2.

Es ist jetzt

$$\int_{l'} \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dv}{v^{n+2}} = \frac{1}{(n+1)\,\xi^{n+1}},$$

$$\int_{l''} \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| = \int_{0}^{\pi} \frac{\xi\, d\vartheta}{\xi^{n+2}} = \frac{\pi}{\xi^{n+1}},$$

$$\int_{l'''} \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| = \int_{0}^{\eta} \frac{d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{n}{2}+1}} = \frac{1}{\xi^{n+1}} \int_{0}^{\frac{\eta}{\xi}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

$$\leqq \frac{1}{\xi^{n+1}} \int_{0}^{\operatorname{cotg}\delta} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\frac{\pi}{2}-\delta}{\xi^{n+1}},$$

also

$$L_x = \int_l \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| \leqq \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{3\pi}{2} - \delta}{\xi^{n+1}}.$$

Im Gebiete $\mathfrak{G}$ ist nun aber $\xi \geqq |x| \sin\delta$, also

$$L_x \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}}, \quad K = \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{3\pi}{2} - \delta}{\sin^{n+1}\delta}\ ^{*)}.$$

Ist x der Endpunkt und v ein beliebiger Punkt des jetzigen Weges l, so ist

$$|v| \geqq \xi \geqq |x| \sin\delta,$$

$$\left|\arg\frac{v}{x}\right| \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta.$$

Wenn wie oben

$$\sigma = \sigma' + i\,\sigma''$$

gesetzt wird, so ist

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| = \left|\frac{v}{x}\right|^{-\sigma'} e^{\sigma'' \arg\frac{v}{x}} \leqq \left|\frac{v}{x}\right|^{-\sigma'} e^{\sigma''\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}.$$

Im Falle $\sigma' \geqq 0$ ist auf dem ganzen Wege l

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| \leqq \frac{e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}}{(\sin\delta)^{\sigma'}}$$

und, da

$$|e^{\beta(x-v)}| \leqq 1$$

ist, auch

$$|\psi| \leqq H, \quad H = \frac{e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}}{(\sin\delta)^{\sigma'}}.$$

Im Falle $\sigma' \leqq 0$ zerlegen wir den Weg l in die beiden Teile l_1 und l_2, die durch die Bedingung $v > s|x|$ bzw. $|v| \leqq s|x|$ charakterisiert sind, wo s reell und größer als 1 ist. Auf l_2 ist

---

*) Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ hat man wie in § 2 $K = \frac{1}{n+1} + \pi$.

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| \leqq s^{|\sigma'|}\, e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)},$$

also

$$|\psi| \leqq H_2,\ H_2 = s^{|\sigma'|}\, e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}.$$

Auf l_1 ist wie in § 2

$$|e^{\beta(x-v)}| \leqq e^{-\beta\left(1-\frac{1}{s}\right)v},$$

ferner

$$\left|\left(\frac{v}{x}\right)^{-\sigma}\right| \leqq \left(\frac{v}{R}\right)^{|\sigma'|} e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)},$$

folglich

$$|\psi| \leqq \frac{e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}}{R^{|\sigma'|}}\, e^{-\beta\left(1-\frac{1}{s}\right)v}\, v^{|\sigma'|}$$

oder

$$|\psi| \leqq H_1,\ H_1 = \left(\frac{|\sigma'|}{\beta R e\left(1-\frac{1}{s}\right)}\right)^{|\sigma'|} e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}.$$

Wenn man s so bestimmt, daß $H_1 = H_2 = H$ wird, so ergibt sich

$$|\psi| \leqq H,\ H = e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}\left(1+\frac{|\sigma'|}{\beta R e}\right)^{|\sigma'|}.\ ^{*})$$

Übrigens kann man die beiden für $\sigma' \geqq 0$ und für $\sigma' \leqq 0$ gefundenen Werte von H durch den größeren Wert

$$H = \left[\frac{e^{\frac{3\pi}{2}-\delta}}{\sin\delta}\left(1+\frac{|\sigma|}{\beta R e}\right)\right]^{|\sigma|}$$

ersetzen.**)

---

*) Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ wird im Falle $\sigma' \geqq 0$

$$H = e^{\pi|\sigma''|},$$

im Falle $\sigma' \leqq 0$

$$H = e^{\pi|\sigma''|}\left(1+\frac{|\sigma'|}{\beta R e}\right)^{|\sigma'|}.$$

**) Hieraus erhält man für $\delta = \frac{\pi}{2}$ den in § 2 angegebenen Wert.

Wie früher ergibt sich, daß die Reihe

$$\eta_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

auch in dem Gebiete

$$\Re(x) \leqq -R, \ \pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

konvergiert, wenn man die Glieder u_ν nach den Formeln von § 2 (nur unter Benutzung des jetzigen Weges l) berechnet. Setzt man

$$Q = MN(1+H)K,$$

so ist in dem angegebenen Gebiete

$$|u_\nu e^{-\alpha_1 x} x^{-\varrho_1}| \leqq \Re \frac{\left(\frac{Q}{|x|^{n+1}}\right)^\nu}{\nu!}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Daher ist auch *in dem Gebiete*

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin\delta}, \ -\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

wenn man wieder

$$\eta_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right)$$

setzt,

$$|\gamma_1| \leqq \Re Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{Q}{R^{n+1}}\right)^\nu}{(\nu+1)!}.$$

Unter derselben Grenze liegt im Gebiete

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin\delta}, \ -\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{2} - \delta$$

der absolute Betrag der durch die Gleichung

$$\eta_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\varrho_2} \left(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}}\right)$$

definierten Funktion γ_2.

§ 5.

Der bisherige Integrationsweg l läßt mannigfache Abänderungen zu, von welchen wir bei der Ausdehnung der bisherigen Untersuchung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung Gebrauch machen. Wir setzen dabei stets voraus, daß der Integrationsweg nicht ins Innere des Kreises $|x| = R$ eindringt.

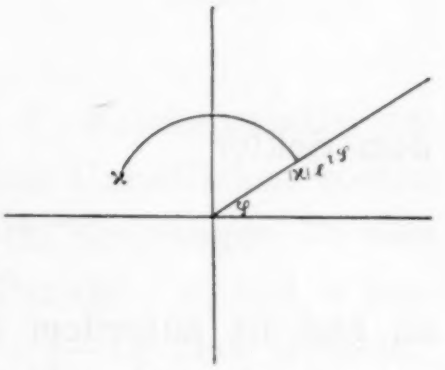
Zunächst sei β wie bisher reell positiv. Wir führen einen Winkel φ ein, welcher die Bedingung

$$0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

erfüllt. Wenn x dem Gebiete

$$|x| \geqq R,\ \varphi \leqq \arg x \leqq \pi$$

angehört, so bestehe der Weg l aus der Geraden l', welche mit dem Argument φ aus dem Unendlichen kommt und in $|x|\, e^{i\varphi}$ endigt, und aus dem Kreisbogen vom Mittelpunkt 0 und vom Zentriwinkel $\leqq \pi$, welcher die Punkte $|x|\, e^{i\varphi}$ und x verbindet. (Fig. 3.)

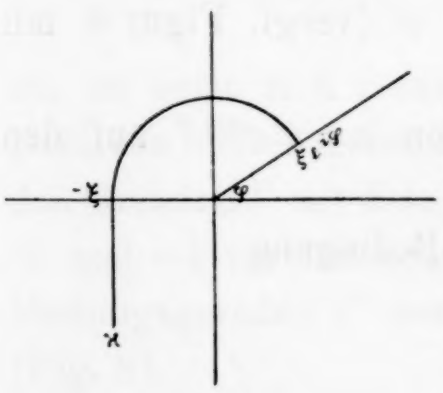


Figur 3.

Gehört $x = -\xi - i\eta$ dem Gebiete

$$\Re(x) \leqq -R,\ \pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

an, so setzt sich der Weg l zusammen aus der mit dem Argument φ aus dem Unendlichen kommenden, in $\xi e^{i\varphi}$ endigenden Geraden l', dem die Punkte $\xi e^{i\varphi}$ und $-\xi$ verbindenden Kreisbogen l'' und der Verbindungsgeraden l''' der Punkte $-\xi$ und $x = -\xi - i\eta$. (Fig. 4).



Figur 4.

Ist v ein beliebiger Punkt des in x endigenden Integrationsweges l, so ist

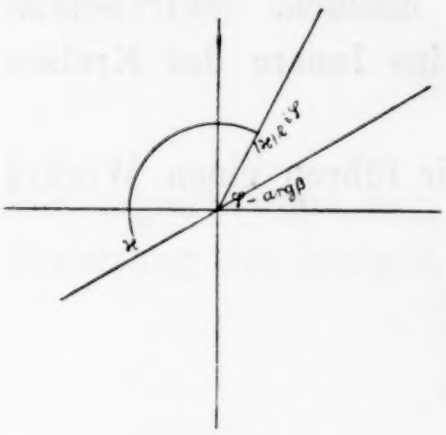
$$L_x = \int_l \left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}},$$

$$|\psi| = |e^{\beta(x-v)}\, x^{\sigma}\, v^{-\sigma}| \leqq H,$$

wo K und H durch eine geringfügige Abänderung des in § 4 benutzten Verfahrens bestimmt werden.

Es sei jetzt β eine beliebige komplexe Größe. Der Winkel φ erfülle die Bedingung

$$-\arg\beta \leqq \varphi < -\arg\beta + \frac{\pi}{2}.$$



Figur 5.

Gehört x dem Gebiete

$$|x| \geqq R,\ \varphi \leqq \arg x \leqq -\arg\beta + \pi$$

an, so wählen wir einen Weg l, welcher aus der mit dem Argument φ aus dem Unendlichen kommenden, in $|x|e^{i\varphi}$ endigenden Geraden l' und dem die Punkte $|x|e^{i\varphi}$ und x verbindenden Kreisbogen l'' zusammengesetzt ist (Fig. 5). Gehört

$$x = -(\xi + i\eta)\, e^{-i\arg\beta}$$

dem Sektor

$$-\arg\beta + \pi \leqq \arg x \leqq -\arg\beta + \frac{3\pi}{2} - \delta$$

an und ist außerdem $\xi \geqq R$, so bestehe der Weg l aus der mit dem Argument φ aus dem Unendlichen kommenden, in $\xi e^{i\varphi}$ endigenden Geraden l', dem die Punkte $\xi e^{i\varphi}$ und $-\xi e^{-i\arg\beta}$ verbindenden Kreisbogen l'' und der Verbindungsgeraden l''' der Punkte $-\xi e^{-i\arg\beta}$ und x (vergl. Figur 6 mit $\varphi' = -\arg\beta + \pi$).

Der jetzige Fall kann durch die Substitution $x = x' e^{i\arg\beta}$ auf den früheren zurückgeführt werden.

Wir können auch, wenn der Winkel φ' der Bedingung

$$\varphi \leqq \varphi' \leqq -\arg\beta + \pi$$

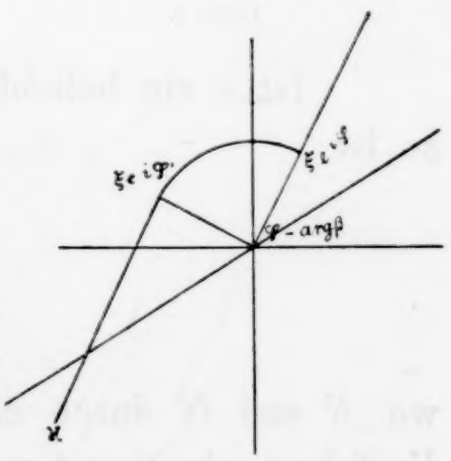
genügt, wenn ferner

$$x = (\xi + i\eta)\, e^{i\varphi'}$$

dem Sektor

$$\varphi' \leqq \arg x \leqq \varphi' + \frac{\pi}{2} - \delta$$

angehört und außerdem $\xi \geqq R$ ist, den zuletzt beschriebenen Weg l so abändern, daß der Kreisbogen l'' in $\xi e^{i\varphi'}$ endigt und die Gerade l''' die Punkte $\xi e^{i\varphi'}$ und x verbindet (Fig. 6).



Figur 6.

Auch jetzt gelten Ungleichungen von der Form

$$L_x \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}}, \quad |\psi| \leqq H.$$

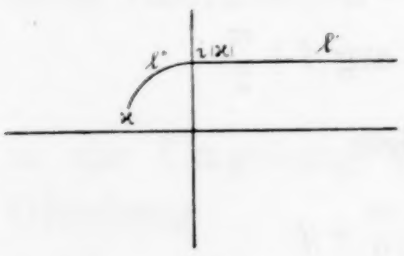
In § 2 und § 4 hätte man an Stelle des dortigen Weges auch einen Weg l von folgender Beschaffenheit wählen können.

Wenn x dem Gebiete

$$|x| \geqq R, \; 0 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2}$$

angehört, so ist l die mit dem Anfangsargument 0 aus dem Unendlichen nach x laufende Gerade. Ist

$$|x| \geqq R, \; \frac{\pi}{2} < \arg x \leqq \pi,$$

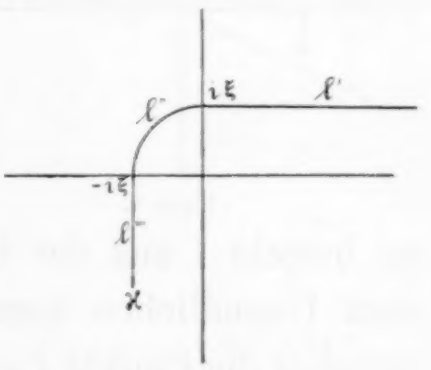


Figur 7.

so besteht l aus der Geraden l', welche parallel der positiven reellen Achse aus dem Unendlichen kommt und in $i|x|$ endigt, und aus dem Kreisbogen l'' vom Mittelpunkt 0, welcher die Punkte $i|x|$ und x verbindet (Fig. 7). Gehört $x = -\xi - i\eta$ dem Gebiete

$$\Re(x) \leqq -R, \; \pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

an, so setzt sich l zusammen aus der parallel der positiven reellen Achse aus dem Unendlichen kommenden Geraden l' mit dem Endpunkt $i\xi$, dem die Punkte $i\xi$ und $-\xi$ verbindenden Viertelkreis l'' und der Verbindungsgeraden l''' der Punkte $-\xi$ und $x = -\xi - i\eta$ (Fig. 8).



Figur 8.

Ist x der Endpunkt und v ein beliebiger Punkt des Weges l, so ist

$$L_x \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}}, \; |\psi| \leqq H;$$

durch Abänderung des in § 2 und § 4 benutzten Verfahrens ergibt sich

$$K = \frac{\frac{3\pi}{2} - \delta}{\sin^{n+1}\delta}$$

und im Falle $\sigma' \geqq 0$

$$H = \frac{e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}}{(\sin\delta)^{\sigma'}},$$

im Falle $\sigma' \leqq 0$

$$H = e^{|\sigma''|\left(\frac{3\pi}{2}-\delta\right)}\left[1+\left(1+\frac{|\sigma'|}{\beta R e}\right)^2\right]^{\frac{|\sigma'|}{2}}.$$

Wir können in diesen Ausdrücken $\delta = \frac{\pi}{2}$ setzen, wenn $0 \leqq \arg x \leqq \pi$ bleibt.

Der zuletzt beschriebene Integrationsweg kann zunächst dadurch abgeändert werden, daß man den geradlinigen Teil l' nicht parallel zur reellen Achse, sondern unter dem Winkel φ gegen diese Achse geneigt annimmt, wo $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$ ist.

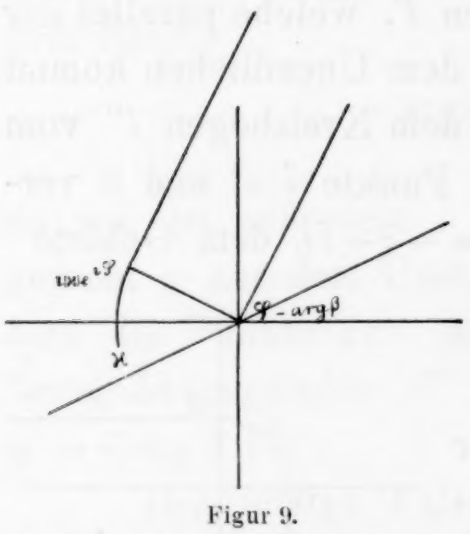
Wir beschreiben den abgeänderten Weg sogleich für den Fall, daß β eine beliebige komplexe Größe ist. Wir führen einen Winkel φ ein, welcher die Bedingung

$$-\arg\beta \leqq \varphi < -\arg\beta + \frac{\pi}{2}$$

erfüllt. Gehört x dem Gebiete

$$|x| \geqq R,\ \varphi \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} + \varphi$$

an, so ist der Weg l eine mit dem Anfangsargument φ aus dem Unendlichen kommende, in x endigende Gerade. Ist



Figur 9.

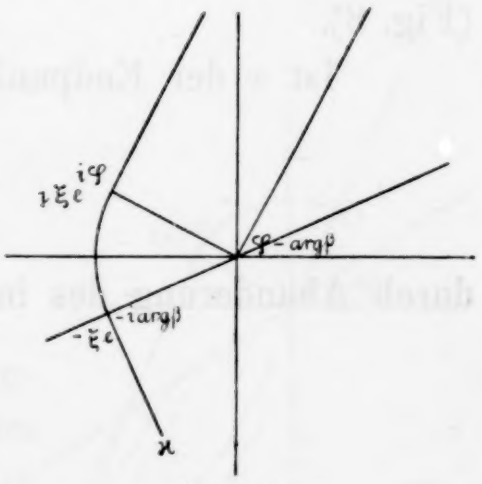
$$|x| \geqq R,\ \frac{\pi}{2} + \varphi \leqq \arg x \leqq -\arg\beta + \pi,$$

so besteht l aus der Geraden l', welche parallel der Geraden $\arg x = \varphi$ aus dem Unendlichen kommt und in $i|x|e^{i\varphi}$ endigt, und aus dem Kreisbogen l'', welcher die Punkte $i|x|e^{i\varphi}$ und x verbindet (Fig. 9).

Wenn $x = -(\xi + i\eta)e^{-i\arg\beta}$ dem Sektor

$$-\arg\beta + \pi \leqq \arg x \leqq -\arg\beta + \frac{3\pi}{2} - \delta$$

angehört und überdies $\xi \geqq R$ ist, so besteht l aus der Geraden l', welche parallel mit der Geraden $\arg x = \varphi$ aus dem Unendlichen kommt und in $i\xi e^{i\varphi}$ endigt, dem die Punkte $i\xi e^{i\varphi}$ und $-\xi e^{-i\arg\beta}$ verbindenden Kreisbogen l'' und der die Punkte $-\xi e^{-i\arg\beta}$ und x verbindenden Geraden l''' (Fig. 10).



Figur 10.

Der zuletzt beschriebene Integrationsweg läßt eine ähnliche Abänderung zu wie die in Fig. 6 dargestellte.

Wir können auch jetzt setzen:

$$L_x \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}}, \quad |\psi| \leqq H,$$

wo K, H endliche positive Größen sind.

§ 6.

Wir wenden uns nun zu der Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$D(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0,$$

deren Koeffizienten

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \cdots \qquad (i=1, \ldots m)$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär sind. Wenn die charakteristische Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0$$

m *verschiedene Wurzeln* $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ hat, so wird die Differentialgleichung durch die m *Thomé*schen Normalreihen

$$S_i = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (i=1, \ldots m)$$

befriedigt.

Die m Funktionen

$$\varphi_i = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right), \quad \Phi_i = 1 + \frac{A_{i1}}{x} + \cdots + \frac{A_{in}}{x^n}, \qquad (i=1, \ldots m)$$

wo n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ ist, genügen der Differentialgleichung

$$D_1(y) = (-1)^m \frac{\begin{vmatrix} y, & \varphi_1, & \cdots \varphi_m \\ y', & \varphi_1', & \cdots \varphi_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(m)}, & \varphi_1^{(m)}, & \cdots \varphi_m^{(m)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1, & \cdots \varphi_m \\ \varphi_1', & \cdots \varphi_m' \\ \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(m-1)}, & \cdots \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix}}$$

$$= y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \cdots + p_{m-1} y' + p_m y = 0.$$

Es ist

$$D_2(y) = D_1(y) - D(y) = x^{-n-2}\mathfrak{P}_1 y^{(m-1)} + \cdots + x^{-n-2}\mathfrak{P}_m y$$

und

$$D_2(\varphi_i) = e^{a_i x} x^{\varrho_i - n - 2}\mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (i=1, \ldots m)$$

wo $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind.

Sind $\Delta_1, \ldots \Delta_m$ die Unterdeterminanten der letzten Zeile der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \cdots & \varphi_m \\ \varphi_1', & \cdots & \varphi_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(m-1)}, & \cdots & \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix},$$

so ist

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-a_i x} x^{-\varrho_i}\mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (i=1, \ldots m)$$

wo $\mathfrak{p}_i$ in der Umgebung von $x = \infty$ regulär ist.

Durch sukzessive Integration der Differentialgleichungen

$$D_1(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu), \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

wo u_0 eine der Funktionen $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ ist, erhält man

$$u_{\nu+1} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \int_{l_i} D_2(u_\nu)\frac{\Delta_i}{\Delta} dx,$$

$$D_2(u_{\nu+1}) = \sum_{i=1}^{m} D_2(\varphi_i) \int_{l_i} D_2(u_\nu)\frac{\Delta_i}{\Delta} dx;$$

die noch passend zu wählenden Integrationswege $l_1, \ldots l_m$ kommen aus dem Unendlichen und endigen in x. Die positive Größe R wählen wir so, daß sich die Koeffizienten P_i im Gebiete $|x| \geq R$ regulär verhalten und daß dieses Gebiet keine Nullstelle der Determinante Δ enthält.

Die weitere Untersuchung führen wir für die *Differentialgleichung dritter Ordnung*

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} + P_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_2 \frac{dy}{dx} + P_3 y = 0,$$

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \cdots \qquad (i=1, 2, 3)$$

durch, welche, wenn *die Wurzeln* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *der charakteristischen Gleichung*

$$\alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 = 0$$

verschieden sind, durch drei Normalreihen S_i $(i = 1, 2, 3)$ befriedigt wird. Je nachdem die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auf einer Geraden liegen oder nicht, gestaltet sich die weitere Untersuchung verschieden. Wir behandeln den ersten Fall in § 7 und den zweiten in § 8.

§ 7.

Wenn *die Größen* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *auf einer Geraden* liegen, so können wir annehmen, daß *die Differenzen* $\alpha_2 - \alpha_1$ *und* $\alpha_3 - \alpha_2$ *reelle positive Größen* sind

Wir setzen zunächst

$$u_0 = \varphi_1, \quad F_0(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

und benutzen die Formeln

$$F_{\nu+1}(x) = \sum_{i=1}^{3} e^{(a_i - a_1)x}\, x^{\varrho_i - \varrho_1}\, \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{l_i} e^{-(a_i - a_1)x}\, x^{-(\varrho_i - \varrho_1) - n - 2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

$$u_{\nu+1}\, e^{-a_1 x}\, x^{-\varrho_1} = \sum_{i=1}^{3} e^{(a_i - a_1)x}\, x^{\varrho_i - \varrho_1}\, \Phi_i\left(\frac{1}{x}\right) \int_{l_i} e^{-(a_i - a_1)x}\, x^{-(\varrho_i - \varrho_1) - n - 2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right) dx;$$

da $\alpha_2 - \alpha_1$ und $\alpha_3 - \alpha_1$ positiv sind, wählen wir das Gebiet der Veränderlichen x und den Integrationsweg $l_1 = l_2 = l_3$ ebenso wie in § 4 und § 2. Die Reihe

$$\eta_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

stellt ein Integral der Differentialgleichung (B) dar, welches sich auf die Form

$$\eta_1 = e^{\alpha_1 x}\, x^{\varrho_1}\left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right)$$

bringen läßt; im Gebiete $\mathfrak{G}_1$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta}, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta$$

ist

$$|\gamma_1| \leqq \mathfrak{N} Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} \left(\frac{Q}{R^{n+1}}\right)^\nu;$$

dabei ist für $|x| \geqq R$

$$|\Phi_i| \leqq \mathfrak{N},\ |\mathfrak{p}_i| \leqq M,\ |\mathfrak{q}_i| \leqq N,$$

ferner ist

$$Q = MN(1 + H_2 + H_3)K,$$

wo K wie in § 4 gebildet ist und H_2 und H_3 aus der in § 4 (und § 2) mit H bezeichneten Größe dadurch hervorgehen, daß man β, σ durch $\alpha_2 - \alpha$, $\varrho_2 - \varrho_1$ bzw. $\alpha_3 - \alpha_1$, $\varrho_3 - \varrho_1$ ersetzt.

Wenn man $u_0 = \varphi_3$ setzt und den geradlinigen Teil des Integrationsweges $l_1 = l_2 = l_3$ längs der negativen reellen Achse aus dem Unendlichen kommen läßt, so erhält man ein Integral η_3, welches die Darstellung

$$\eta_3 = e^{\alpha_3 x} x^{\varrho} \left(\Phi_3 + \frac{\gamma_3}{x^{n+1}} \right)$$

gestattet, wo $|\gamma_3|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_3$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta},\quad -\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{2} - \delta$$

endlich bleibt.

Das für Differentialgleichungen zweiter Ordnung benutzte Verfahren läßt sich nicht unverändert anwenden, wenn man mit $u_0 = \varphi_2$ beginnt. Jetzt ist

$$F_0(x) = \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F_{\nu+1}(x) = e^{(\alpha_1 - \alpha_2)x} x^{\varrho_1 - \varrho_2} \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_{l_1} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x - n - 2} x^{\varrho_2 - \varrho_1} F_\nu(x) \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$+ \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_{l_2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^{n+2}}$$

$$+ e^{(\alpha_3 - \alpha_2)x} x^{\varrho_3 - \varrho_2} \mathfrak{q}_3\left(\frac{1}{x}\right) \int_{l_3} e^{-(\alpha_3 - \alpha_2)x} x^{-(\varrho_3 - \varrho_2) - n - 2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_3\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

wo $\alpha_2 - \alpha_1$ und $\alpha_3 - \alpha_2$ positiv sind.

Wir beschränken die Veränderliche x auf das Gebiet

$$|x| \geqq R \text{ für } 0 \leqq \arg x \leqq \pi,$$

$$\mathfrak{R}(x) \geqq R \text{ „ } 0 \geqq \arg x \geqq -\frac{\pi}{2} + \delta,$$

$$\mathfrak{R}(x) \leqq -R \text{ „ } \pi \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

wo $0<\delta\leqq\frac{\pi}{2}$ ist, und wählen Integrationswege l_1, l_2, l_3 von der in § 2 und § 4 beschriebenen Art, welche ganz in diesem Gebiete verlaufen; wir lassen l_1 längs der negativen, l_3 längs der positiven reellen Achse aus dem Unendlichen kommen und l_2 entweder mit l_1 oder mit l_3 zusammenfallen. Es ist aber jetzt nicht möglich, die drei Wege l_1, l_2, l_3 übereinstimmend anzunehmen.

Wir wählen K wie in § 4; H_1 und H_3 gehen aus der dortigen Größe H hervor, wenn man β, σ durch $\alpha_2-\alpha_1$, $\varrho_1-\varrho_2$ bzw. $\alpha_3-\alpha_2$, $\varrho_3-\varrho_2$ ersetzt. Dann ist im oben angegebenen Gebiete

$$|F_\nu(x)|\leqq N\Big(\frac{Q}{R^{n+1}}\Big)^\nu,$$

wo

$$Q=MN(H_1+1+H_3)K$$

ist; denn aus der obigen Formel für $F_{\nu+1}(x)$ folgt jetzt

$$|F_{\nu+1}(x)|\leqq N\Big(\frac{Q}{R^{n+1}}\Big)^\nu\cdot MN(H_1+1+H_3)\frac{K}{|x|^{n+1}}$$

$$=N\Big(\frac{Q}{R^{n+1}}\Big)^\nu\frac{Q}{|x|^{n+1}}\leqq N\Big(\frac{Q}{R^{n+1}}\Big)^{\nu+1}.$$

Die Formel für $u_{\nu+1}e^{-\alpha_2 x}x^{-\varrho_2}$, welche aus der angeschriebenen für $F_{\nu+1}(x)$ hervorgeht, wenn man $\mathfrak{q}_i\big(\frac{1}{x}\big)$ durch $\Phi_i\big(\frac{1}{x}\big)$ ersetzt, ergibt

$$|u_{\nu+1}e^{-\alpha_2 x}x^{-\varrho_2}|\leqq\mathfrak{N}\Big(\frac{Q}{R^{n+1}}\Big)^\nu\frac{Q}{|x|^{n+1}}.$$

Demnach ist die Reihe

$$\eta_2=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu$$

im obigen Gebiete konvergent, falls man R so groß wählt, daß $\frac{Q}{R^{n+1}}<1$ ist.

Wir ersetzen das bisherige Gebiet durch das engere Gebiet $\mathfrak{G}_2$

$$|x|\geqq\frac{R}{\sin\delta},\quad R>\sqrt[n+1]{Q},$$

$$-\frac{\pi}{2}+\delta\leqq\arg x\leqq\frac{3\pi}{2}-\delta.$$

Setzt man

$$\eta_2 = e^{a_2 x}\, x^{\varrho_2}\Big(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}}\Big),$$

so ist in $\mathfrak{G}_2$

$$|\gamma_2| \leqq \Re Q \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\frac{Q}{R^{n+1}}\Big)^{\nu} = \frac{\Re Q}{1-\frac{Q}{R^{n+1}}}.$$

Beschränken wir die Veränderliche x auf das Gebiet

$$|x| \geqq \quad R \text{ für } \pi \leqq \arg x \leqq 2\pi,$$

$$\Re(x) \leqq -R \quad \text{„} \quad \frac{\pi}{2}+\delta \leqq \arg x \leqq \pi,$$

$$\Re(x) \geqq \quad R \quad \text{„} \quad 2\pi \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{2}-\delta$$

und wählen wir die Wege l_1, l_2, l_3 wie früher, aber mit der Maßgabe, daß sie ganz im jetzigen Gebiete verlaufen, so erhalten wir ein Integral $\bar{\eta}_2$, welches in diesem Gebiete durch eine konvergente Reihe dargestellt wird. Wir führen wieder das engere Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}_2$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin\delta}, \quad R > \sqrt[n+1]{Q},$$

$$\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{2}-\delta$$

ein, in welchem

$$\bar{\eta}_2 = e^{a_2 x}\, x^{\varrho_2}\Big(\Phi_2 + \frac{\bar{\gamma}_2}{x^{n+1}}\Big),$$

$$|\bar{\gamma}_2| \leqq \frac{\Re Q}{1-\frac{Q}{R^{n+1}}}$$

ist.

Um zu zeigen, daß η_2 das einzige Integral der Differentialgleichung (B) ist, welches die Bedingung

$$\lim\ \eta_2\, e^{-a_2 x} x^{-\varrho_2} = 1$$

erfüllt, wenn x mit $0 \leqq \arg x \leqq \pi$ ins Unendliche geht, nehmen wir an, es sei für $0 \leqq \arg x \leqq \pi$

$$\lim\ (c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3)\, e^{-a_2 x} x^{-\varrho_2} = 1$$

oder

$$\lim \Big[c_1 e^{-(a_2-a_1)x} x^{-(\varrho_2-\varrho_1)} \Big(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}} \Big) + c_2 \Big(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}} \Big) + c_3 e^{(a_3-a_2)x} x^{\varrho_3-\varrho_2} \Big(\Phi_3 + \frac{\gamma_3}{x^{n+1}} \Big) \Big] = 0.$$

Setzt man $\arg x = 0$ bzw. $= \pi$, so ergibt sich $c_1 = 0$ und $c_3 = 0$; wegen $\lim \Phi_2 = 1$ muß $c_2 = 1$ sein. Demnach erhält man stets dasselbe Integral η_{j2}, welche Zahl n man auch bei der Bildung zugrunde legt; d. h. es gilt für $\frac{\pi}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}$ die asymptotische Gleichung $\eta_2 \backsim S_2$.

So beweist man *die in der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ gültigen asymptotischen Gleichungen*

$$\eta_{j1} \backsim S_1 \text{ für } -\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2},$$

$$\eta_{j2} \backsim S_2 \quad „ \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2},$$

$$\eta_{j2} \backsim S_2 \quad „ \quad \frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2},$$

$$\eta_{j3} \backsim S_3 \quad „ \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2}.$$

§ 8.

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *nicht auf einer Geraden* liegen, so können wir annehmen, daß die Gerade $\alpha_1 \alpha_2$ der imaginären Achse parallel und nach oben gerichtet ist und daß α_3 rechts von dieser Geraden liegt. Die Winkel des Dreiecks $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ werden mit $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ bezeichnet.

Wir setzen zunächst

$$u_0 = \varphi_1, \quad F_0(x) = \mathfrak{y}_1\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

und wenden die Formel an:

$$F_{\nu+1}(x) = \mathfrak{y}_1\Big(\frac{1}{x}\Big) \int_{l_1} x^{-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_1\Big(\frac{1}{x}\Big) dx + e^{(a_2-a_1)x} x^{\varrho_2-\varrho_1} \mathfrak{y}_2\Big(\frac{1}{x}\Big) \int_{l_2} e^{-(a_2-a_1)x} x^{-(\varrho_2-\varrho_1)-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_2\Big(\frac{1}{x}\Big) dx + e^{(a_3-a_1)x} x^{\varrho_3-\varrho_1} \mathfrak{y}_3\Big(\frac{1}{x}\Big) \int_{l_3} e^{-(a_3-a_1)x} x^{-(\varrho_3-\varrho_1)-n-2} F_\nu(x) \mathfrak{p}_3\Big(\frac{1}{x}\Big) dx;$$

aus dem Ausdruck für $F_{\nu+1}(x)$ geht der Ausdruck für $u_{\nu+1}e^{-\alpha_1 x}x^{-\varrho_1}$ hervor, indem man $\eta_i\left(\frac{1}{x}\right)$ durch $\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)$ ersetzt. Wir benutzen jetzt Integrationswege von der in § 5 beschriebenen Art, und zwar muß das Argument am Anfang von l_2 gleich $-\arg(\alpha_2-\alpha_1)$ (oder um weniger als $\frac{\pi}{2}$ davon verschieden), das Anfangsargument von l_3 gleich $-\arg(\alpha_3-\alpha_1)$ (oder um weniger als $\frac{\pi}{2}$ davon verschieden) sein. Die Veränderliche x muß den beiden Bedingungen

$$-\frac{3\pi}{2}-\arg(\alpha_2-\alpha_1)+\delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\arg(\alpha_2-\alpha_1)-\delta,$$

$$-\frac{3\pi}{2}-\arg(\alpha_3-\alpha_1)+\delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\arg(\alpha_3-\alpha_1)-\delta,$$

wo $0<\delta\leqq\frac{\pi}{2}$ ist, zugleich genügen.

Je nachdem wir

$$\arg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\pi}{2},\ \arg(\alpha_3-\alpha_1)=\frac{\pi}{2}-\vartheta_1$$

oder

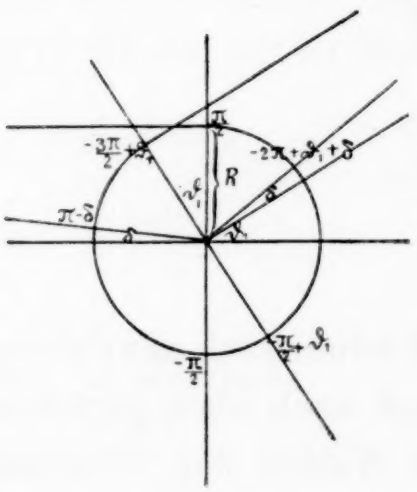
$$\arg(\alpha_2-\alpha_1)=-\frac{3\pi}{2},\ \arg(\alpha_3-\alpha_1)=\frac{\pi}{2}-\vartheta_1$$

setzen, erhalten wir den Sektor

$$-2\pi+\vartheta_1+\delta \leqq \arg x \leqq \pi-\delta$$

oder den Sektor

$$\delta \leqq \arg x \leqq \pi+\vartheta_1-\delta.$$



Figur 11.

Wir beschränken, indem wir zunächst den ersten Sektor behandeln, x auf das Gebiet (Fig. 11)

$$|x| \geqq R \text{ für } -\frac{3\pi}{2}+\vartheta_1 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\Re(ix) \leqq -R \text{ „ } -2\pi+\vartheta_1+\delta \leqq \arg x \leqq -\frac{3\pi}{2}+\vartheta_1,$$

$$\Re(ixe^{i\vartheta_1}) \geqq -R \text{ „ } \frac{\pi}{2} \leqq \arg x \leqq \pi-\delta.$$

Am Anfange des Weges l_2 haben wir das Argument $-\frac{\pi}{2}$, am Anfange des Weges l_3 das Argument $-\frac{\pi}{2}+\vartheta_1$; der letzte geradlinige Teil l''' eines jeden Integrationsweges beginnt mit $\arg x=\frac{\pi}{2}+\vartheta_1$ bzw. mit $\arg x=-\frac{3\pi}{2}+\vartheta_1$;

den Weg l_1 lassen wir mit l_2 oder mit l_3 zusammenfallen. Die so gebildete Reihe

$$\eta_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

ist in dem angegebenen Gebiete konvergent, wenn nur $\frac{Q}{R^{n+1}} < 1$ ist;*) Q ist ähnlich gebildet wie im vorangehenden Paragraphen. Wir können schreiben:

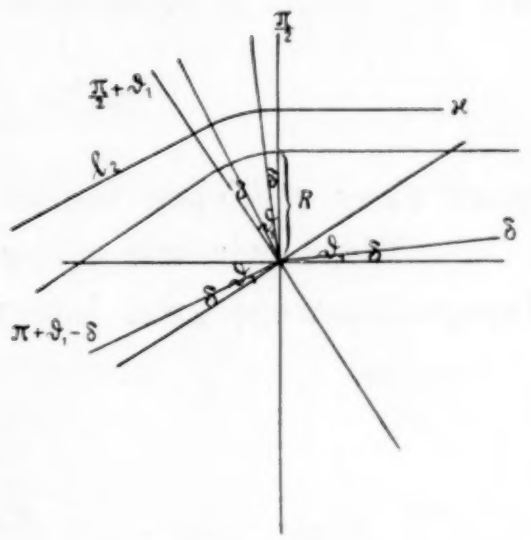
$$\eta_{11} = e^{a_1 x}\, x^{\varrho_1} \left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}} \right),$$

wo $|\gamma_1|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_1$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta}, \quad R > \sqrt[n+1]{Q},$$

$$-2\pi + \vartheta_1 + \delta \leqq \arg x \leqq \pi - \delta$$

unter einer endlichen Größe bleibt.



Figur 12.

Indem wir jetzt den zweiten der obigen Sektoren betrachten, beschränken wir uns auf das Gebiet (Fig. 12)

$$|x| \geqq R \text{ für } \frac{\pi}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} + \vartheta_1,$$

$$\Re(ix) \leqq -R \quad „ \quad \delta \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\Re(ix\, e^{i\vartheta_1}) \leqq -R \quad „ \quad \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \leqq \arg x \leqq \pi + \vartheta_1 - \delta.$$

Um Integrationswege zu erhalten, welche ganz in diesem Gebiete verlaufen, wählen wir Wege von der am Ende von § 5 beschriebenen Art, d. h. Wege, deren geradliniger Teil l' verlängert nicht durch den Nullpunkt geht. Der geradlinige Teil l' des Weges l_2 kommt parallel der Geraden $\arg x = \pi + \vartheta_1 - \delta$, der geradlinige Teil von l_3 parallel der Geraden $\arg x = \delta$ aus dem Unendlichen; der etwaige geradlinige Teil l''' von l_2 beginnt bei $\arg x = \frac{\pi}{2}$ und der etwaige geradlinige Teil l''' von l_3 bei $\arg x = \frac{\pi}{2} + \vartheta_1$. Der Weg l_1 fällt entweder mit l_2 oder mit l_3 zusammen. Wir müssen zunächst $\delta < \vartheta_1$ annehmen, damit am Anfange des aus dem Unendlichen kommenden Weges l_2 oder l_3 die zu integrierende Funktion ver-

*) Vergl. η_2 in § 7.

schwindet. Hier lassen sich die Integrationswege also, wenn ϑ_1 spitz ist, nicht so wählen, daß sie ganz in dem Sektor $\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta_1 \leqq \frac{\pi}{2} + \vartheta_1$ verlaufen, welcher dem Wert $\delta = \frac{\pi}{2}$ entspricht. Wir erhalten jetzt ein Integral

$$\eta_1 = e^{a_1 x} x^{\varrho_1} \left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}} \right),$$

wo $|\gamma_1|$, wenn R hinreichend groß angenommen wird, im Gebiete $\mathfrak{G}_1$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta}, \quad \delta \leqq \arg x \leqq \pi + \vartheta_1 - \delta$$

unter einer endlichen Größe liegt.

Wenn wir mit $u_0 = \varphi_2$ beginnen, so erhalten wir je nach Wahl der Integrationswege zwei Integrale

$$\eta_2 = e^{a_2 x} x^{\varrho_2} \left(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}} \right),$$

$$\eta_2 = e^{a_2 x} x^{\varrho_2} \left(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}} \right),$$

wo $|\gamma_2|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_2$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta}, \quad -\pi + \delta \leqq \arg x \leqq 2\pi - \vartheta_2 - \delta,$$

$|\gamma_2|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_2$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta}, \quad -\pi - \vartheta_2 \leqq \arg x \leqq 0$$

endlich bleibt; mit $u_0 = \varphi_3$ ergeben sich zwei Integrale

$$\eta_3 = e^{a_3 x} x^{\varrho_3} \left(\Phi_3 + \frac{\gamma_3}{x^{n+1}} \right),$$

$$\eta_3 = e^{a_3 x} x^{\varrho_3} \left(\Phi_3 + \frac{\gamma_3}{x^{n+1}} \right),$$

wo $|\gamma_3|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_3$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta}, \quad -2\pi - \vartheta_2 + \delta \leqq \arg x \leqq \vartheta_1 - \delta,$$

$|\gamma_3|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_3$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin \delta}, \quad -\pi + \vartheta_1 - \delta \leqq \arg x \leqq \pi - \vartheta_2 - \delta$$

endlich ist; in allen Fällen muß R hinreichend groß genommen werden, da die Reihenkonvergenz eine Bedingung von der Form $R > \sqrt[n+1]{Q}$ erfordert.

Um zu zeigen, daß $\bar{\eta}_1$ das einzige Integral ist, für welches

$$\lim \bar{\eta}_1 e^{-\alpha_1 x} x^{-\varrho_1} = 1$$

ist, wenn x mit $0 < \arg x < \pi + \vartheta_1$ ins Unendliche geht, nehmen wir an, es sei für alle angegebenen Argumente

$$\lim (c_1 \bar{\eta}_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3) = 1$$

oder

$$\lim \Big[c_1 \Big(\Phi_1 + \frac{\bar{\gamma}_1}{x^{n+1}} \Big) + c_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1) x} x^{\varrho_2 - \varrho_1} \Big(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}} \Big) + c_3 e^{(\alpha_3 - \alpha_1) x} x^{\varrho_3 - \varrho_1} \Big(\Phi_3 + \frac{\gamma_3}{x^{n+1}} \Big) \Big] = 1 .$$

Für $\arg x = \pi + \frac{\vartheta_1}{2}$ hat $(\alpha_2 - \alpha_1) x$ das Argument $\frac{3\pi}{2} + \frac{\vartheta_1}{2}$, so daß

$$\lim e^{(\alpha_2 - \alpha_1) x} x^{\varrho_2 - \varrho_1} = \infty ,$$

also $c_2 = 0$ ist; für $\arg x = \pi$ ist das Argument von $(\alpha_3 - \alpha_1) x$ gleich $\frac{3\pi}{2} + \vartheta_1$, also

$$\lim e^{(\alpha_3 - \alpha_1) x} x^{\varrho_3 - \varrho_1} = \infty$$

und $c_2 = 0$; wegen $\lim \Phi_1 = 1$ ist $c_1 = 1$. Daraus folgt, daß die Funktion $\bar{\eta}_1$ von n unabhängig ist.

Dasselbe beweist man für die fünf anderen Integrale.

Damit sind *die folgenden asymptotischen Gleichungen bewiesen:*

$$\begin{aligned}
\eta_1 &\sim S_1 \text{ für } -2\pi + \vartheta_1 < \arg x < \pi , \\
\bar{\eta}_1 &\sim S_1 \text{ „ } 0 < \arg x < \pi + \vartheta_1 , \\
\eta_2 &\sim S_2 \text{ „ } -\pi < \arg x < 2\pi - \vartheta_2 , \\
\bar{\eta}_2 &\sim S_2 \text{ „ } -\pi - \vartheta_2 < \arg x < 0 , \\
\eta_3 &\sim S_3 \text{ „ } -2\pi - \vartheta_2 < \arg x < \vartheta_1 , \\
\bar{\eta}_3 &\sim S_3 \text{ „ } -\pi + \vartheta_1 < \arg x < \pi - \vartheta_2 .
\end{aligned}$$

§ 9.

Indem wir uns jetzt zu einer Differentialgleichung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ *vom Range* $k+1$ wenden, beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die *Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$(C) \qquad D(y)+\frac{d^2y}{dx^2}+x^k P_1\frac{dy}{dx}+x^{2k}P_2 y=0,$$

wo

$$P_i=a_i+\frac{a_i'}{x}+\frac{a_i''}{x^2}+\cdots \qquad (i=1,2)$$

in der Umgebung von $x=\infty$ regulär ist. Die Differentialgleichung (C) wird, wenn die Gleichung

$$\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$$

zwei verschiedene Wurzeln α_1, α_2 hat, durch die *Thomé*schen Normalreihen

$$S_i=e^{g_i(x)}x^{\varrho_i}\left(1+\frac{A_{i1}}{x}+\frac{A_{i2}}{x^2}+\cdots\right) \qquad (i=1,2)$$

befriedigt, worin

$$g_i(x)=\alpha_i\frac{x^{k+1}}{k+1}+\alpha_{i1}\frac{x^k}{k}+\cdots+\alpha_{ik}x \qquad (i=1,2)$$

eine ganze Funktion $(k+1)$-ten Grades von x ist. Wir können wieder $\beta=\alpha_2-\alpha_1$ *als reell und positiv* voraussetzen.

Die Funktionen

$$\varphi_i=e^{g_i(x)}x^{\varrho_i}\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right),\ \Phi_i=1+\frac{A_{i1}}{x}+\cdots+\frac{A_{in}}{x^n} \qquad (i=1,2)$$

genügen der Differentialgleichung

$$D_1(y)=y''+x^k p_1 y'+x^{2k}p_2 y=0.$$

Es ist

$$p_i-P_i=\frac{\mathfrak{P}_i}{x^{k+n+2}}, \qquad (i=1\ 2)$$

wo $\mathfrak{P}_i$ als Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellbar ist.

Wenn man

$$D_2(y)=D_1(y)-D(y)=x^{-n-2}\mathfrak{P}_1 y'+x^{k-n-2}\mathfrak{P}_2 y$$

setzt, so schreibt sich die Differentialgleichung (C)

$$D_1(y)=D_2(y).$$

Wir haben jetzt

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_1,\varphi_2\\ \varphi_1',\varphi_2'\end{vmatrix}=e^{g_1(x)+g_2(x)}x^{\varrho_1+\varrho_2+k}\Phi\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo Φ eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{x}$ ist,

$$\Delta_1 = -\varphi_2, \quad \Delta_2 = \varphi_1,$$

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-g_i(x)}\, x^{-\varrho_i - k}\, \mathfrak{p}_i\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (i=1,2)$$

wo $\mathfrak{p}_i$ in der Umgebung von $x=\infty$ regulär ist. Setzt man

$$D_2(\varphi_i) = e^{g_i(x)}\, x^{\varrho_i + k - n - 2}\, \mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (i=1,2)$$

so ist auch $\mathfrak{q}_i$ in der Umgebung von $x=\infty$ regulär.

Wir führen die positive Größe R so ein, daß für $|x| \geqq R$ nicht nur P_1 und P_2 regulär sind, sondern auch Φ von Null verschieden ist; dann sind auch $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ für $|x| \geqq R$ regulär.

Indem wir u_0 gleich φ_1 oder φ_2 setzen, berechnen wir u_1, u_2, ... vermittels der Rekursionsformel

$$u_{\nu+1} = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i \int_l D_2(u_\nu)\, \frac{\Delta_i}{\Delta}\, dx,$$

wo l ein noch passend zu wählender Integrationsweg ist, welcher aus dem Unendlichen kommt und in x endigt; wie früher ist

$$D_2(u_{\nu+1}) = \sum_{i=1}^{2} D_2(\varphi_i) \int_l D_2(u_\nu)\, \frac{\Delta_i}{\Delta}\, dx.$$

§ 10.

Wir beginnen mit $u_0 = \varphi_1$. Wir setzen

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1,\ \beta_1 = \alpha_{21} - \alpha_{11},\ \ldots\ \beta_k = \alpha_{2k} - \alpha_{1k},$$

$$h(x) = g_2(x) - g_1(x) = \beta\, \frac{x^{k+1}}{k+1} + \beta_1\, \frac{x_k}{k} + \cdots + \beta_k\, x,$$

$$\sigma = \varrho_2 - \varrho_1;$$

β ist nach der oben gemachten Annahme positiv. Setzt man

$$D_2(u_\nu) = e^{g_1(x)}\, x^{\varrho_1 + \nu - n - 2}\, F_\nu(x), \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

so ist

$$F_0(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

und

$$F_{\nu+1}(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right)\int_l x^{-n-2} F_\nu(x)\,\mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$+ e^{h(x)} x^\sigma\, \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right)\int_l e^{-h(x)} x^{-\sigma-n-2} F_\nu(x)\,\mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right)dx;$$

ferner ist

$$u_{\nu+1} e^{-g_1(x)} x^{-\varrho_1} = \boldsymbol{\Phi}_1\left(\frac{1}{x}\right)\int_l x^{-n-2} F_\nu(x)\,\mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$+ e^{h(x)} x^\sigma\, \boldsymbol{\Phi}_2\left(\frac{1}{x}\right)\int_l e^{-h(x)} x^{-\sigma-n-2} F_\nu(x)\,\mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Den Integrationsweg l wählen wir folgendermaßen.
Wir setzen

$$v^{k+1} = x^{k+1} + w$$

und verstehen unter $l = l^{(p)}$ $(p = 0, 1, \ldots k)$ den Weg, welchen v durchläuft, wenn

$$w = r\, e^{i\varphi}$$

mit dem der Bedingung

$$2p\pi \leqq \varphi < 2p\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (p \text{ ganze Zahl})$$

genügenden *festen* Argument φ aus dem Unendlichen nach 0 geht; dabei ist von den $k+1$ Werten von

$$v = \sqrt[k+1]{x^{k+1} + w}$$

derjenige zu nehmen, welcher für $w = 0$ in

$$x = \varrho\, e^{i\vartheta}$$

übergeht.

Im Falle $k = 0$ ist $v = x + w$, so daß l die aus dem Unendlichen mit dem Anfangsargument φ nach x laufende Gerade ist.

Die Gleichung

$$v^{k+1} = x^{k+1} + r\, e^{i\varphi}$$

geht, wenn man

$$v = \varrho'\, e^{i\vartheta'}$$

setzt, durch Multiplikation mit $e^{-i\varphi}$ in

$$\varrho'^{k+1}\, e^{i((k+1)\vartheta'-\varphi)} = \varrho^{k+1}\, e^{i((k+1)\vartheta-\varphi)} + r$$

über; durch Trennung der reellen und imaginären Glieder erhält man die beiden Gleichungen

$$\varrho'^{k+1} \cos((k+1)\vartheta' - \varphi) = \varrho^{k+1} \cos((k+1)\vartheta - \varphi) + r,$$
$$\varrho'^{k+1} \sin((k+1)\vartheta' - \varphi) = \varrho^{k+1} \sin((k+1)\vartheta - \varphi).$$

Beschränkt man x auf den Sektor

$$\frac{\varphi}{k+1} \leqq \arg x \leqq \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi}{k+1},$$

so liegt der Winkel $(k+1)\vartheta - \varphi$ zwischen 0 und π, hat also einen positiven Sinus und die Gleichung

$$\varrho' = \varrho \sqrt[k+1]{\frac{\sin((k+1)\vartheta - \varphi)}{\sin((k+1)\vartheta' - \varphi)}}$$

stellt, wenn ϑ' auf das Intervall

$$\frac{\varphi}{k+1} \leqq \vartheta' \leqq \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi}{k+1}$$

beschränkt und der positive Wert der Wurzel genommen wird, eine in demselben Sektor verlaufende Linie L dar,*) welche die Punkte

$$\vartheta' = \frac{\varphi}{k+1},\ \varrho' = \infty$$

und

$$\vartheta' = \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi}{k+1},\ \varrho' = \infty$$

verbindet, durch den Punkt $x = \varrho\, e^{i\vartheta}$ geht und bei

$$\vartheta' = \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi}{2(k+1)}$$

den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius

$$\varrho \sqrt[k+1]{\sin((k+1)\vartheta - \varphi)}$$

---

*) Die k übrigen Zweige, welche in den Sektoren

$$\frac{\varphi}{k+1} + \frac{2\lambda\pi}{k+1} \leqq \vartheta' \leqq \frac{\varphi}{k+1} + \frac{2(\lambda+1)\pi}{k+1} \qquad (\lambda = 1, \ldots k)$$

verlaufen, kommen hier nicht in Betracht.

von außen berührt. Im Falle $k=0$ ist die Linie L eine Gerade, im Falle $k=1$ ein Ast einer gleichseitigen Hyperbel. Der Integrationsweg l ist derjenige Teil der Kurve L, welcher mit dem Argument $\frac{\varphi}{k+1}$ aus dem Unendlichen kommt und in x endigt.

Um diejenige Kurve L zu erhalten, welche den um den Nullpunkt mit dem Radius R beschriebenen Kreis in dem Punkte mit dem Argument $\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{2(k+1)}$ berührt, setzen wir

$$\varrho=R,\ \vartheta=\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{2(k+1)}.$$

Die eine Hälfte dieser Kurve ist dargestellt durch

$$\varrho'=\frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin((k+1)\vartheta'-\varphi)}}\quad\left(\vartheta'=\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{2(k+1)}\cdots\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{k+1}\right);$$

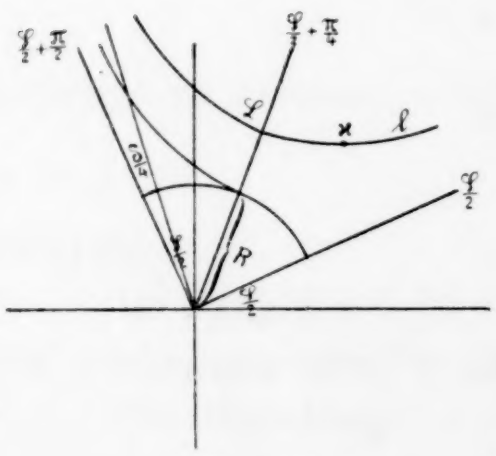
wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}_\varphi$ den von dieser Hälfte und dem Kreisbogen

$$\varrho'=R \text{ für } \vartheta'=\frac{\varphi}{k+1}\cdots\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{2(k+1)}$$

abgegrenzten, ins Unendliche reichenden Teil des Sektors

$$\frac{\varphi}{k+1}\leqq\arg x\leqq\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{k+1}.$$

$\mathfrak{G}_\varphi$ ist also durch die folgenden Bedingungen definiert:



Figur 13.

$$\varrho'\geqq R \text{ für } \frac{\varphi}{k+1}\leqq\vartheta'\leqq\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{2(k+1)},$$

$$\varrho'\geqq\frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin((k+1)\vartheta'-\varphi)}}$$

$$\text{für } \frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{2(k+1)}\leqq\vartheta'\leqq\frac{\varphi}{k+1}+\frac{\pi}{k+1}.$$

Dann verläuft jeder nach einem Punkt x von $\mathfrak{G}_\varphi$ gehende Weg l ganz im Gebiete $\mathfrak{G}_\varphi$. (Fig. 13 für $k=1$.)

Wir beschränken φ auf das Intervall

$$2p\pi\leqq\varphi\leqq 2p\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\qquad(p=0,1,\ldots,k),$$

wo

$$0 < \delta \leqq \pi$$

ist; wir unterwerfen überdies die Größe

$$\omega = (k+1)\,\vartheta - \varphi$$

der Bedingung

$$0 \leqq \omega \leqq \pi - \frac{\delta}{2}.$$

Dann ist bei festgehaltenem φ

$$\frac{\varphi}{k+1} \leqq \vartheta \leqq \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi - \frac{\delta}{2}}{k+1}.$$

Läßt man φ zwischen den oben angegebenen Grenzen variieren, so bewegt sich x in dem Sektor

$$\frac{2p\pi}{k+1} \leqq \vartheta \leqq \frac{2p\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k+1}.$$

Wir trennen von dem Gebiete $\mathfrak{G}_\varphi$ den in dem Sektor

$$\frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi - \frac{\delta}{2}}{k+1} \leqq \vartheta' \leqq \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi}{k+1}$$

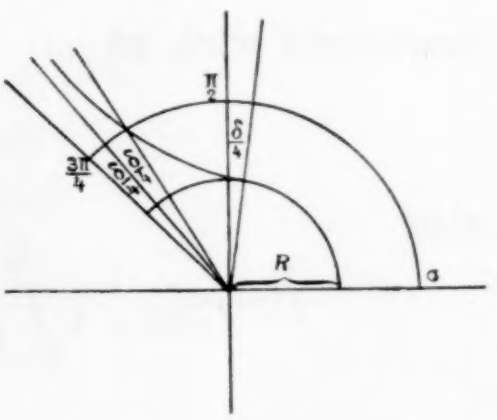
enthaltenen Teil ab; das übrig bleibende Gebiet

$$\varrho' \geqq R \text{ für } \frac{\varphi}{k+1} \leqq \vartheta' \leqq \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi}{2(k+1)},$$

$$\varrho' \geqq \frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin((k+1)\,\vartheta' - \varphi)}} \text{ für } \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi}{2(k+1)} \leqq \vartheta' \leqq \frac{\varphi}{k+1} + \frac{\pi - \frac{\delta}{2}}{k+1}$$

bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}'_\varphi$ (Fig. 13).

Die sämtlichen Gebiete $\mathfrak{G}'_\varphi$, welche zu Werten von φ zwischen den oben angegebenen Grenzen gehören, füllen das folgende Gebiet aus, welches wir mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen (Fig. 14 für $k=1,\ p=0$):



Figur 14.

$$\varrho' \geqq R \text{ für } \frac{2p\pi}{k+1} \leqq \vartheta' \leqq \frac{(2p+1)\pi - \frac{\delta}{2}}{k+1},$$

$$\varrho' \geqq \frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin\left((k+1)\,\vartheta' - \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}} \text{ für } \frac{(2p+1)\pi - \frac{\delta}{2}}{k+1} \leqq \vartheta' \leqq \frac{\left(2p + \frac{3}{2}\right)\pi - \delta}{k+1}.$$

§ 11.

Zur Berechnung von

$$L_x = \int_l \left| \frac{dv}{v^{n+2}} \right|$$

setzen wir

$$v^{k+1} = \varrho^{k+1} e^{i(k+1)\vartheta} + r e^{i\varphi}$$
$$= [\varrho^{k+1} \cos(k+1)\vartheta + r\cos\varphi] + i[\varrho^{k+1} \sin(k+1)\vartheta + r \sin\varphi],$$
$$|v|^{2(k+1)} = r^2 + 2\varrho^{k+1} r \cos\omega + \varrho^{2(k+1)},$$

wo $\omega = (k+1)\vartheta - \varphi$ ist, und

$$|dv| = \frac{dr}{(k+1)|v|^k};$$

es ist also

$$L_x = \frac{1}{k+1} \int_0^\infty \frac{dr}{(r^2 + 2\varrho^{k+1} r\cos\omega + \varrho^{2(k+1)})^{\frac{n+k+2}{2(k+1)}}},$$

wo der positive Wert der im Nenner erscheinenden Potenz zu nehmen ist, oder

$$L_x = \frac{f(\omega)}{\varrho^{n+1}}, \quad f(\omega) = \frac{1}{k+1} \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 2u\cos\omega + 1)^{\frac{n+k+2}{2(k+1)}}}.$$

Wenn ω wie oben auf das Intervall

$$0 \leqq \omega \leqq \pi - \frac{\delta}{2}$$

beschränkt wird, ist

$$u^2 + 2u\cos\omega + 1 \geqq u^2 - 2u\cos\frac{\delta}{2} + 1,$$

also

$$f(\omega) \leqq \frac{1}{k+1} \int_0^\infty \frac{du}{\left(u^2 - 2u\cos\frac{\delta}{2} + 1\right)^{\frac{n+k+2}{2(k+1)}}}$$
$$= \frac{1}{(k+1)\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{n+1}{k+1}}} \int_{-\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{n+k+2}{2(k+1)}}}$$

oder

$$f(\omega) \leqq K,$$

wo K eine endliche positive Größe darstellt. Demnach ist im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}$

$$L_x \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}}.$$

Im Falle $k=0$ ist

$$f(\omega) = \frac{1}{\sin^{n+1}\frac{\delta}{2}} \int_{-\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{n}{2}+1}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sin^{n+1}\frac{\delta}{2}} \int_{-\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi - \frac{\delta}{2}}{\sin^{n+1}\frac{\delta}{2}},$$

so daß

$$K = \frac{\pi - \frac{\delta}{2}}{\sin^{n+1}\frac{\delta}{2}}$$

gesetzt werden kann.

Wir suchen eine Größe, unter welcher die Funktion

$$\psi = e^{h(x) - h(v) + \sigma(\log x - \log v)}$$

bleibt, wenn x ein beliebiger Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}$ und v ein beliebiger Punkt eines in x endigenden Weges l ist. Führt man an Stelle von v die Veränderliche w ein, so wird

$$\psi = e^W, \quad W = -\frac{\beta w}{k+1} - \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\beta_{k+1-\lambda} x^\lambda \left[\left(1 + \frac{w}{x^{k+1}}\right)^{\frac{\lambda}{k+1}} - 1\right]}{\lambda}$$

$$- \frac{\sigma}{k+1} \log\left(1 + \frac{w}{x^{k+1}}\right).$$

Der reelle Teil von $-\frac{\beta w}{k+1}$ ist

$$-\frac{\beta r}{k+1}\cos\varphi \leqq -\frac{\beta r}{k+1}\sin\frac{\delta}{2}.$$

Die Funktion

$$f_\lambda(z) = \frac{\left(1 + z^{\frac{k+1}{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{k+1}} - 1}{z},$$

welche dadurch eindeutig fixiert ist, daß für reelle positive z die reellen positiven Werte der Ausdrücke

$$z^{\frac{k+1}{\lambda}},\ (1+z^{\frac{k+1}{\lambda}})^{\frac{\lambda}{k+1}}$$

gewählt und die Geraden $\arg z = \frac{\lambda\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)}{k+1}$ und $\arg z = -\frac{\lambda\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)}{k+1}$ nicht überschritten werden, bleibt dem absoluten Betrage nach kleiner als eine endliche Größe M_λ; denn der so fixierte Zweig der Funktion $f_\lambda(z)$ hat in dem Gebiete

$$-\frac{\lambda\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)}{k+1} \leqq \arg z \leqq \frac{\lambda\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)}{k+1}$$

nur die singulären Stellen $z=0$ und $z=\infty$ mit den endlichen Funktionswerten $f_\lambda(0)=0$ und $f_\lambda(\infty)=1$.

Wenn man

$$z = \frac{w^{\frac{\lambda}{k+1}}}{x^\lambda}$$

setzt und beachtet, daß

$$\arg z = \frac{\lambda}{k+1}(\varphi-(k+1)\,\vartheta)$$

zwischen 0 und $-\frac{\lambda\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)}{k+1}$ bleibt, so erhält man

$$\left| x^\lambda \frac{\left(1+\frac{w}{x^{k+1}}\right)^{\frac{\lambda}{k+1}}-1}{w^{\frac{\lambda}{k+1}}} \right| \leqq M_\lambda$$

oder

$$\left| x^\lambda \left[\left(1+\frac{w}{x^{k+1}}\right)^{\frac{\lambda}{k+1}}-1\right] \right| \leqq M_\lambda\, r^{\frac{\lambda}{k+1}}.$$

Es ist

$$\left|1+\frac{w}{x^{k+1}}\right| = \sqrt{1+\frac{r^2}{\varrho^{2(k+1)}}+\frac{2r}{\varrho^{k+1}}\cos\omega}$$

$$\geqq \sqrt{1+\frac{r^2}{\varrho^{2(k+1)}}-\frac{2r}{\varrho^{k+1}}\cos\frac{\delta}{2}} \geqq \sin\frac{\delta}{2};$$

denn $\sin^2\frac{\delta}{2}$ ist das Minimum der Funktion

$$1+t^2-2\,t\cos\frac{\delta}{2}$$

der Veränderlichen $t = r\varrho^{-(k+1)}$. Ferner ist

$$\log\left(1+\frac{w}{x^{k+1}}\right) = \log\left|1+\frac{w}{x^{k+1}}\right| + i\arg\left(1+\frac{w}{x^{k+1}}\right),$$

also hat, wenn

$$\sigma = \sigma' + i\,\sigma''$$

gesetzt wird, der Ausdruck

$$-\sigma\log\left(1+\frac{w}{x^{k+1}}\right)$$

den reellen Teil

$$\Re = -\sigma'\log\left|1+\frac{w}{x^{k+1}}\right| + \sigma''\arg\left(1+\frac{w}{x^{k+1}}\right).$$

Das Argument $-\omega$ von $\frac{w}{x^{k+1}}$ liegt zwischen 0 und $-\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)$; zwischen denselben Grenzen liegt auch das Argument von $1+\frac{w}{x^{k+1}}$, so daß

$$\left|\arg\left(1+\frac{w}{x^{k+1}}\right)\right| \leqq \pi - \frac{\delta}{2}$$

ist. Für $|x| \geqq R$ ist

$$\log\sin\frac{\delta}{2} \leqq \log\left|1+\frac{w}{x^{k+1}}\right| \leqq \log\left(1+\frac{r}{R^{k+1}}\right),$$

es ist also im Falle $\sigma' \geqq 0$

$$\Re \leqq -\sigma'\log\sin\frac{\delta}{2} + |\sigma''|\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right),$$

im Falle $\sigma' \leqq 0$

$$\Re \leqq |\sigma'|\log\left(1+\frac{r}{R^{k+1}}\right) + |\sigma''|\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right).$$

Der bequemeren Schreibweise halber benutzen wir die für beliebiges σ gültige Ungleichung

$$\Re \leqq |\sigma|\left(\log\left(1+\frac{r}{R^{k+1}}\right) - \log\sin\frac{\delta}{2} + \pi - \frac{\delta}{2}\right).$$

Der reelle Teil von W ist nicht größer als die Summe aus dem reellen Teil des ersten Gliedes, dem reellen Teil (oder dem absoluten Betrage) des letzten Gliedes und den absoluten Beträgen der übrigen Glieder, also

$$\leqq -\frac{\beta r}{k+1}\sin\frac{\delta}{2}+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{|\beta_{k+1-\lambda}|\,M_\lambda\, r^{\frac{\lambda}{k+1}}}{\lambda}$$

$$+\frac{|\sigma|}{k+1}\Big(\log\Big(1+\frac{r}{R^{k+1}}\Big)-\log\sin\frac{\delta}{2}+\pi-\frac{\delta}{2}\Big).$$

Demnach ist

$$|\psi|\leqq e^{\frac{|\sigma|}{k+1}\left(\pi-\frac{\delta}{2}-\log\sin\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\times\, e^{-\frac{\beta r}{k+1}\sin\frac{\delta}{2}+\sum_{\lambda+1}^{k}\frac{|\beta_{k+1-\lambda}|\,M_\lambda\, r^{\frac{\lambda}{k+1}}}{\lambda}+\frac{|\sigma|}{k+1}\log\left(1+\frac{r}{R^{k+1}}\right)}.$$

Der letzte Exponentialausdruck, welcher für $r=0$ den Wert 1 und für $r=\infty$ den Wert 0 annimmt, bleibt für alle reellen positiven Werte von r unter einer endlichen Größe. Daher ist

$$|\psi|\leqq H,$$

wo H eine endliche positive Größe darstellt.

§ 12.

Für $|x|\geqq R$ sei

$$\left|\mathfrak{p}_i\Big(\frac{1}{x}\Big)\right|\leqq M,\quad \left|\mathfrak{q}_i\Big(\frac{1}{x}\Big)\right|\leqq N,\quad \left|\mathfrak{P}_i\Big(\frac{1}{x}\Big)\right|\leqq \mathfrak{N},$$

also auch

$$|F_0(x)|\leqq N.$$

Wir beschränken x auf das in § 10 eingeführte Gebiet $\mathfrak{G}'_\varphi$ und verstehen unter l den durch die Gleichung

$$v^{k+1}=x^{k+1}+r\,e^{i\varphi}\qquad (r=\infty\ldots 0)$$

definierten, aus dem Unendlichen nach x laufenden Weg; φ sei ein fester Winkel zwischen $2p\pi$ und $2p\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}$.

Dann ist

$$|F_\nu(x)|\leqq M^\nu N^{\nu+1}(1+H)^\nu\frac{L_x^\nu}{\nu!}.$$

Denn, wenn dies richtig ist, so folgt aus der Gleichung

$$F_{\nu+1}(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right)\int_l F_\nu(v)\,\mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{v^{n+2}}$$

$$+ \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right)\int_l e^{h(x)-h(v)+\sigma(\log x-\log v)}\,F_\nu(v)\,\mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{v^{n+2}},$$

da

$$\left|\frac{dv}{v^{n+2}}\right| = dL_v$$

ist,

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq M^{\nu+1}N^{\nu+2}(1+H)^{\nu+1}\int_l \frac{L_v^\nu}{\nu!}\,dL_v$$

$$= M^{\nu+1}N^{\nu+2}(1+H)^{\nu+1}\frac{L_x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Aus der Formel

$$u_{\nu+1}\,e^{-g_1(x)}x^{-\varrho_1} = \Phi_1\left(\frac{1}{x}\right)\int_l F_\nu(v)\,\mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{v^{n+2}}$$

$$+ \Phi_2\left(\frac{1}{x}\right)\int_l e^{h(x)-h(v)+\sigma(\log x-\log v)}\,F_\nu(v)\,\mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{v^{n+2}}$$

folgt

$$|u_{\nu+1}\,e^{-g_1(x)}x^{-\varrho_1}| \leqq \mathfrak{R}.\ M^{\nu+1}N^{\nu+1}(1+H)^{\nu+1}\int_l \frac{L_v^\nu}{\nu!}\,dL_v$$

$$= \mathfrak{R}.\ M^{\nu+1}N^{\nu+1}(1+H)^{\nu+1}\frac{L_x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Nun ist

$$L_x \leqq \frac{K}{|x|^{n+1}},$$

also, wenn man

$$MN(1+H)K = Q$$

setzt,

$$|u_\nu\,e^{-g_1(x)}x^{-\varrho_1}| \leqq \mathfrak{R}\,\frac{\left(\frac{Q}{|x|^{n+1}}\right)^\nu}{\nu!}.$$

Demnach ist die der Differentialgleichung (C) genügende Reihe

$$\eta_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

im Gebiete $\mathfrak{G}'_\varphi$ konvergent. Wenn man

$$\eta_1 = e^{g_1(x)}\, x^{\varrho_1}\left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right)$$

setzt, so ist für alle dem Gebiete $\mathfrak{G}'_\varphi$ angehörigen Werte von x

$$\gamma_1 = x^{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu\, e^{-g_1(x)}\, x^{-\varrho_1},$$

also

$$|\gamma_1| \leqq \mathfrak{N} Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{Q}{|x|^{n+1}}\right)^\nu \leqq \mathfrak{N} Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{Q}{R^{n+1}}\right)^\nu.$$

Die Größe Q ist von dem zwischen $2p\pi$ und $2p\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$ angenommenen Winkel φ unabhängig.

Jedes einzelne der zum Zwecke der Bestimmung von η_1 nach einander zu berechnenden Integrale bleibt bei festgehaltenem Wert von x ungeändert, wenn man den Winkel φ, welcher dem Integrationsweg l zugrunde liegt, innerhalb der zulässigen Grenzen ändert. Die Reihe η_1 ist im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}$ konvergent, und auch die Ungleichung

$$|\gamma_1| \leqq \mathfrak{N} Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{Q}{R^{n+1}}\right)^\nu$$

gilt überall in $\mathfrak{G}$.

Der zu

$$\vartheta' = \frac{\left(2p + \frac{3}{2}\right)\pi - \delta}{k+1}$$

gehörige Radiusvektor der Begrenzungslinie von $\mathfrak{G}$ ist

$$\varrho' = \frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin\frac{\delta}{2}}}.$$

Das Gebiet

$$|x| \geqq \frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin\frac{\delta}{2}}},\ \frac{2p\pi}{k+1} \leqq \arg x \leqq \frac{\left(2p + \frac{3}{2}\right)\pi - \delta}{k+1}$$

bildet einen Teil des Gebietes $\mathfrak{G}$. Da der Sektor

$$\frac{2p\pi}{k+1} \geqq \arg x \geqq \frac{\left(2p - \frac{3}{2}\right)\pi + \delta}{k+1}$$

ebenso behandelt werden kann wie bisher der Sektor

$$\frac{2p\pi}{k+1} \leqq \arg x \leqq \frac{\left(2p+\frac{3}{2}\right)\pi - \delta}{k+1},$$

so führen wir das Gebiet $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1^{(p)}\,(p=0, 1, \ldots k)$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin\frac{\delta}{2}}},\quad \frac{\left(2p-\frac{3}{2}\right)\pi + \delta}{k+1} \leqq \arg x \leqq \frac{\left(2p+\frac{3}{2}\right)\pi - \delta}{k+1}$$

ein.

Wir haben ein Integral

$$\eta_1^{(p)} \qquad (p=0, 1, \ldots k)$$

der Differentialgleichung (C), welches durch eine im Gebiete $\mathfrak{G}_1^{(p)}$ konvergente Reihe dargestellt wird und sich auf die Form

$$\eta_1^{(p)} = e^{g_1(x)}\, x^{\varrho_1}\left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1^{(p)}}{x^{n+1}}\right)$$

bringen läßt, wo $|\gamma_1^{(p)}|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_1^{(p)}$ unter einer endlichen Größe bleibt.

§ 13.

Wir führen eine der bisherigen entsprechende Rechnung aus, indem wir mit $u_0 = \varphi_2$ beginnen.

Wir haben jetzt, wenn

$$D_2(u_\nu) = e^{g_2(x)}\, x^{\varrho_2+k-n-2}\, F_\nu(x) \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird,

$$F_0(x) = \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

und

$$F_{\nu+1}(x) = \mathfrak{q}_1\left(\frac{1}{x}\right) e^{-h(x)}\, x^{-\sigma} \int_l e^{h(x)}\, x^{\sigma-n-2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$+ \mathfrak{q}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_l x^{-n-2}\, F_\nu(x)\, \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right) dx;$$

$u_{\nu+1}\, e^{-g(x)}\, x^{-\varrho_2}$ geht aus $F_{\nu+1}(x)$ dadurch hervor, daß man $\mathfrak{q}_i\left(\frac{1}{x}\right)$ durch $\Phi_i\left(\frac{1}{x}\right)$ ersetzt. Unter l verstehen wir den aus dem Unendlichen kommenden, in x endenden Weg, welchen v beschreibt, wenn

$$w = v^{k+1} - x^{k+1} = r e^{i\varphi}$$

mit dem festen Argument φ, welches der Bedingung

$$2p\pi+\frac{\pi}{2}<\varphi<2p\pi+\frac{3\pi}{2} \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots\ k)$$

genügt, aus dem Unendlichen nach 0 geht.

Mit $\mathfrak{G}_2^{(p)}$ $(p=0,\ 1,\ \ldots,\ k)$ bezeichnen wir das Gebiet

$$|x|\geqq\frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin\frac{\delta}{2}}},\quad\frac{\left(2p-\frac{1}{2}\right)\pi+\delta}{k+1}\leqq\arg x\leqq\frac{\left(2p+\frac{5}{2}\right)\pi-\delta}{k+1}.$$

Das Integral

$$\eta_2^{(p)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots\ k)$$

läßt sich auf die Form bringen:

$$\eta_2^{(p)}=e^{g_2(x)}x^{\varrho_2}\left(\Phi_2+\frac{\gamma_2^{(p)}}{x^{n+1}}\right),$$

wo $|\gamma_2^{(p)}|$ im Gebiete $\mathfrak{G}_2^{(p)}$ unter einer endlichen Größe bleibt.

Wir zeigen, daß die $2(k+1)$ Integrale

$$\eta_1^{(0)},\ \eta_1^{(1)},\ \ldots\ \eta_1^{(k)};\ \eta_2^{(0)},\ \eta_2^{(1)},\ \ldots\ \eta_2^{(k)}$$

von der Zahl n, welche bei ihrer Bildung benutzt wurde, unabhängig sind.

Es ist

$$\lim\eta_1^{(p)}e^{-g_1(x)}x^{-\varrho_1}=1,$$

wenn x mit dem Argument $\frac{2p\pi}{k+1}$ ins Unendliche geht. Um zu zeigen, daß $\eta_1^{(p)}$ das einzige Integral mit dieser Eigenschaft ist, nehmen wir an, es sei

$$\eta_1=c_1\eta_1^{(p)}+c_2\eta_2^{(p)},\ \lim\eta_1e^{-g_1(x)}x^{-\varrho_1}=1,$$

wenn x mit dem angegebenen Argument ins Unendliche geht. Es ist

$$\eta_1e^{-g_1(x)}x^{-\varrho_1}=c_1\left(\Phi_1+\frac{\gamma_1^{(p)}}{x^{n+1}}\right)+c_2e^{h(x)}x^{\sigma}\left(\Phi_2+\frac{\gamma_2^{(p)}}{x^{n+1}}\right),$$

wo $\gamma_1^{(p)}$, $\gamma_2^{(p)}$ bei dem beschriebenen Grenzübergang endlich bleiben. Da

$$h(x)=\frac{\beta x^{k+1}}{k+1}+\cdots,$$

β reell positiv und das Argument von x^{k+1} gleich $2p\pi$ ist, so ist

$$\lim e^{h(x)}x^{\sigma}=\infty;$$

also muß $c_2=0$ und, da $\lim\Phi_1=1$ ist, $c_1=1$, d. h. $\eta_1=\eta_1^{(p)}$ sein. Demnach erhält man dieselbe Funktion $\eta_1^{(p)}$, wie auch n ursprünglich gewählt war.

So ergibt sich der folgende Satz:

In der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $x=\infty$ *gilt die asymptotische Gleichung*

$$\eta_1^{(p)} \backsim S_1 \qquad (p=0, 1, \ldots k)$$

für

$$\frac{2p\pi}{k+1} - \frac{3\pi}{2(k+1)} < \arg x < \frac{2p\pi}{k+1} + \frac{3\pi}{2(k+1)}$$

und die asymptotische Gleichung

$$\eta_2^{(p)} \backsim S_2 \qquad (p=0, 1, \ldots k)$$

für

$$\frac{2p\pi}{k+1} - \frac{\pi}{2(k+1)} < \arg x < \frac{2p\pi}{k+1} + \frac{5\pi}{2(k+1)}.$$

Nunmehr lassen sich die im 23. Bd. der Act. math., S. 171 ff. für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit *rationalen* Koeffizienten angestellten Untersuchungen auf die Differentialgleichung (C) übertragen.

Der Fall $\alpha_1 = \alpha_2$ läßt sich (a. a. O., S. 199 ff.) auf den bisher behandelten Fall $\alpha_1 \neq \alpha_2$ zurückführen.

Über die Kräfte, die Kegelschnitte als Bahnen hervorrufen.

Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.

Die von *Bertrand**) angeregte Frage „*Die Kräfte zu bestimmen, welche bei beliebiger Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit stets Kegelschnitte als Bahnen hervorbringen,*“ hat Herr *Kyparissos Stephanos* im 131. Bande dieses Journals behandelt und bewiesen, daß die Richtung einer solchen Kraft durch einen festen Punkt gehen oder parallel mit sich selbst bleiben muß. Wenn ich hier dieselbe Frage betrachte, so geschieht dies nicht nur, weil meine Methode eine viel kürzere und leichtere Lösung der Aufgabe gestattet, sondern hauptsächlich, weil aus meiner Lösung die bemerkenswerte Eigenschaft hervorgeht, daß, *wenn eine Kraft für zwei verschiedene Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten die in Rede stehende Eigenschaft hat, sie dieselbe für alle Richtungen hat.*

Man denke sich in der Ebene $x\,0\,y$ die Bewegung eines Punktes, der zur Zeit $t=0$ die Lage (a, b) und die Geschwindigkeit (a', b') hat; von der Kraft, die auf den Punkt wirkt, wird angenommen, daß sie nur von der Stelle (x, y) abhängt, so daß ihre Komponenten X, Y als (ein- oder mehrwertige aber kontinuierliche und differenzierbare) Funktionen der Koordinaten x, y betrachtet werden. Die Koordinaten (x, y) dieses Punktes, als Funktionen der Zeit t betrachtet, können für einen gewissen Zeitabschnitt $(t=0 \ldots h)$ durch die *Taylor*sche Formel dargestellt werden:

*) „Comptes Rendus“, année 1877.

$$(1.)\qquad x = x_0 + x_0' t + x_0'' \frac{t^2}{2} + x_0''' \frac{t^3}{6} + \cdots,$$
$$y = y_0 + y_0' t + y_0'' \frac{t^2}{2} + y_0''' \frac{t^3}{6} + \cdots;$$

es ist aber (2.)

$$x'' = X, \qquad y'' = Y,$$
$$x''' = \frac{\partial X}{\partial x} x' + \frac{\partial X}{\partial y} y', \qquad y''' = \frac{\partial Y}{\partial x} x' + \frac{\partial Y}{\partial y} y',$$
$$x'''' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} x'^2 + 2\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} x'y' + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} y'^2 + P, \qquad y'''' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} x'^2 + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} x'y' + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} y'^2 + Q,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\text{wo } P = X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y}\right); \qquad \left(\text{wo } Q = X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Soll nun die Bahn bei beliebiger Anfangsgeschwindigkeit (a', b') und bei beliebiger Anfangslage (a, b) immer eine Kurve zweiten Grades sein, so müssen die Werte (1.) für alle Werte von t $(t = 0 \ldots h)$ eine gewisse Gleichung von der Form

$$\boldsymbol{A}(x-a)^2 + 2\boldsymbol{B}(x-a)(y-b) + \boldsymbol{\Gamma}(y-b)^2 + 2\boldsymbol{\Delta}(x-a) + 2\boldsymbol{E}(y-b) = 0$$

erfüllen, deren Koeffizienten $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots$ von den Anfangswerten (a, b), (a', b') abhängen, und es handelt sich darum, die Kraft (X, Y) zu bestimmen, welche eine solche Bewegung hervorbringen kann.

Um die Aufgabe zu vereinfachen, will ich nur diejenigen Anfangsgeschwindigkeiten in Betracht ziehen, welche parallel zu den Koordinatenaxen $0x$, $0y$ sind. (Die auf diese Weise erhaltenen Bedingungen sind zur Lösung der Aufgabe notwendig, daß sie auch hinreichend sind, wird sich in der Folge ergeben); ich setze also zuerst $b' = 0$, dann ist nach (2.) für $x = a$, $y = b$

$$x_0 = a, \qquad y_0 = b,$$
$$x_0' = a', \qquad y_0' = 0,$$
$$x_0'' = X, \qquad y_0'' = Y,$$
$$x_0''' = \frac{\partial X}{\partial x} a', \qquad y_0''' = \frac{\partial Y}{\partial x} a',$$
$$x_0'''' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} a'^2 + P, \qquad y_0'''' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} a'^2 + Q,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad y_0^{(5)} = \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} a'^3 + Ma',$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\text{wo } M = 3\frac{\partial Q}{\partial x} - 2\frac{\partial Y}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right).$$

Es ist noch zu erwähnen, daß in den Komponenten X, Y und ihren Ableitungen statt x, y die Anfangskoordinaten (a, b) (die der Zeit $t=0$ entsprechen) zu setzen sind.

Die Entwicklungen von x und y sind jetzt nach dem vorhergehenden

$$(3.)\quad x=a+a't+X\frac{t^2}{2}+a'\frac{\partial X}{\partial x}\frac{t^3}{6}+\Big(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}a'^2+P\Big)\frac{t^4}{24}+\cdots,$$

$$y=b+Y\frac{t^2}{2}+a'\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{t^3}{6}+\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}a'^2+Q\Big)\frac{t^4}{24}+\Big(\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}a'^3+Ma'\Big)\frac{t^5}{120}+\cdots;$$

ferner ist (4.)

$$(x-a)^2=a'^2t^2+a'Xt^3+\Big(\frac{X^2}{4}+\frac{1}{3}a'^2\frac{\partial X}{\partial x}\Big)t^4+\frac{1}{12}a'\Big(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}a'^2+P+2X\frac{\partial X}{\partial x}\Big)t^5+\cdots,$$

$$(y-b)^2=\frac{Y^2}{4}t^4+\frac{1}{6}a'Y\frac{\partial Y}{\partial x}t^5+\cdots,$$

$$(x-a)(y-b)=\frac{1}{2}a'Yt^3+\Big(\frac{1}{4}XY+\frac{1}{6}a'^2\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)t^4$$
$$+\frac{1}{12}\Big[X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}a'^2+Q\Big)\Big]a't^5+\cdots.$$

Die Bahn muß jetzt im Anfangspunkte (a, b) ihre Tangente parallel zur x-Achse haben, folglich ist ihre Gleichung von der Form

$$\boldsymbol{A}(x-a)^2+2\boldsymbol{B}(x-a)(y-b)+\boldsymbol{\Gamma}(y-b)^2+2\boldsymbol{E}(y-b)=0.$$

Setzen wir nun die Werte von $(x-a)$, $(y-b)$, ... in diese Gleichung ein, so müssen die Koeffizienten jeder Potenz von t gleich Null sein; wir erhalten demnach folgende Gleichungen:

$$\boldsymbol{A}a'^2+\boldsymbol{E}Y=0,$$

$$\boldsymbol{A}X+\boldsymbol{B}Y+\frac{1}{3}\boldsymbol{E}\frac{\partial Y}{\partial x}=0,$$

$$\boldsymbol{A}\Big(3X^2+4a'^2\frac{\partial X}{\partial x}\Big)+\boldsymbol{B}\Big(6XY+4a'^2\frac{\partial Y}{\partial x}\Big)+3\boldsymbol{\Gamma}Y^2+\boldsymbol{E}\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}a'^2+Q\Big)=0,$$

$$\boldsymbol{A}\Big(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}a'^2+P+2X\frac{\partial X}{\partial x}\Big)+\boldsymbol{B}\Big(2Y\frac{\partial X}{\partial x}+2X\frac{\partial Y}{\partial x}+Q+\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}a'^2\Big)$$
$$+2\boldsymbol{\Gamma}Y\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{1}{5}\boldsymbol{E}\Big(\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}a'^2+M\Big)=0,$$

und durch Elimination der Koeffizienten $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ... erhalten wir folgende Bedingungsgleichung*):

*) Den besonderen Fall, wo die Kraft parallel zu sich selbst bleibt, werden wir später betrachten.

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} a'^2 & 0 & 0 & Y \\ X & Y & 0 & \frac{1}{3}\frac{\partial Y}{\partial x} \\ 3X^2+4a'^2\frac{\partial X}{\partial x}, & 4a'^2\frac{\partial Y}{\partial x} & 3Y & \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}a'^2+Q \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}a'^2+P+2X\frac{\partial X}{\partial x}, & 2\left(Y\frac{\partial X}{\partial x}-X\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+Q+\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}a'^2, & 2\frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{1}{5}\left(M+a'^2\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Anfangskoordinaten (a, b), welche man in den Komponenten X, Y und ihren Ableitungen statt der x, y setzen muß, sind ganz beliebig und von einander unabhängig. Daher können wir sie mit x, y bezeichnen und mit den Variabeln x, y, von denen die X, Y abhängen, identifizieren.

Die Bedingung (5.) soll aber für jeden Wert der Anfangsgeschwindigkeit a' gelten. Wenn man also die Determinante nach Potenzen von a' entwickelt und in die Form: $E+\Theta a'^2+Ha'^4=0$ setzt, so zerfällt die Bedingung (5.) in die drei folgenden:

$$(E)\quad PY-QX\equiv X^2\frac{\partial Y}{\partial x}-Y^2\frac{\partial X}{\partial y}+XY\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)=0,$$

$$(\Theta)\quad Y\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{1}{5}M\right)-\frac{\partial Y}{\partial x}(2\sigma+Q)=0, \qquad \left(\text{wo } \sigma=X\frac{\partial Y}{\partial x}-Y\frac{\partial X}{\partial x}\right),$$

$$(H)\quad 9Y^2\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}-45Y\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+40\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^3=0.$$

Diese drei Bedingungsgleichungen für die unbekannten Komponenten X, Y hat uns die Betrachtung der zur x-Achse parallelen Anfangsgeschwindigkeiten geliefert. Eine bloße Vertauschung der (x, y) und (X, Y) mit einander wird uns offenbar zu den Bedingungen führen, die von den zur y-Achse parallelen herrühren; diese sind folgende:

$$(E)\quad X^2\frac{\partial Y}{\partial x}-Y^2\frac{\partial X}{\partial y}+XY\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)=0,$$

$$(\Theta')\quad X\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}+\frac{1}{5}N\right)-\frac{\partial X}{\partial y}(2\tau+P)=0,$$

$$(H')\quad 9X^2\frac{\partial^3 X}{\partial y^3}-45X\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+40\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^3=0,$$

$$\left(\text{wo } \tau=Y\frac{\partial X}{\partial y}-X\frac{\partial Y}{\partial y}, \text{ und } N=3\frac{\partial P}{\partial y}-2\frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right).$$

Integration der Gleichungen $\boldsymbol{H=0}$ *und* $\boldsymbol{H'=0}$.

Wenn man in der Gleichung $\boldsymbol{H=0}$ setzt $Y = y \cdot Y_1^{-\frac{3}{2}}$, so kommt für Y_1 die Gleichung $\frac{\partial^3 Y_1}{\partial x^3} = 0$, d. h. $Y_1 = Cx^2 + 2C_1 x + C_2$, folglich ist

$$Y = \frac{y}{(Cx^2 + 2C_1 x + C_2)^{\frac{3}{2}}}; \tag{6.}$$

ebenso finden wir aus $(\boldsymbol{H'})$

$$X = \frac{x}{(Sy^2 + 2S_1 y + S_2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{7.}$$

wo die C, C_1, C_2 nur von y und die S, S_1, S_2 nur von x abhängen.

Integration der Gleichung $\boldsymbol{E=0}$.

Setzt man in der Gleichung $\boldsymbol{E=0}$ $\frac{Y}{X} = \omega$, so geht sie in die lineare Gleichung über:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

deren Integral (der Fall $\omega =$ Konst. ist schon ausgeschlossen) lautet

$$y - \omega x = \varphi(\omega), \tag{8.}$$

wo $\varphi(\omega)$ eine willkürliche Funktion bedeutet. Durch diese Gleichung wird für jede Stelle (x, y) der Ebene die Richtung der Kraft gegeben.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist folgende: Für jeden Wert von ω stellt sie eine gerade Linie dar, mit deren Richtung die der Kraft übereinstimmen muß, und diese Geraden umhüllen die Kurve

$$x = -\varphi'(\omega), \quad y = \varphi(\omega) - \omega \varphi'(\omega).$$

Integration der Gleichungen $\boldsymbol{\Theta=0}$ *und* $\boldsymbol{\Theta'=0}$.

Um die Integration dieser Gleichungen zu ermöglichen, wollen wir denselben mit Hilfe der Gleichung $\boldsymbol{E=0}$ eine andere Form geben. Zu dem Ende schreiben wir die Gleichung $\boldsymbol{E=0}$ wie folgt:

$$\frac{X\frac{\partial Y}{\partial x} - Y\frac{\partial X}{\partial x}}{Y} = \frac{Y\frac{\partial X}{\partial y} - X\frac{\partial Y}{\partial y}}{X}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sigma}{Y} = \frac{\tau}{X};$$

ferner ist $\frac{P}{X} = \frac{Q}{Y}$ (nach derselben Gleichung $E = 0$); wir können also setzen

$$P = \varrho \cdot X, \quad Q = \varrho \cdot Y,$$
$$\tau = r \cdot X, \quad \sigma = r \cdot Y,$$

wo ϱ und r zwei neue Variablen sind, welche bei der Vertauschung der (x, y) und der (X, Y) mit einander invariant bleiben.

Es folgt $$\varrho - r = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Führt man die Werte von Q und σ in die Gleichung $\Theta = 0$ ein, so findet man

$$(9.) \qquad 3\frac{\partial \varrho}{\partial x} + 5\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial \lg Y}{\partial x}(3r + 4\varrho) = 0.$$

Auf ähnliche Weise findet man aus (Θ')

$$(9'.) \qquad 3\frac{\partial \varrho}{\partial y} + 5\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial \lg X}{\partial y}(3r + 4\varrho) = 0.$$

Es scheint nun zweckmäßig, statt der unabhängigen Variabeln x, y andere einzuführen. Wir nehmen als solche die Variabeln x und $\omega \left(= \frac{Y}{X}\right)$. Um die Transformation auszuführen, haben wir die Formeln (wo $x + \varphi'(\omega)$ durch $\varkappa$ bezeichnet wird)

$$(10.) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \omega}, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \omega},$$

worin die in eckige Klammern eingeschlossenen Ableitungen den früheren unabhängigen Variabeln x, y entsprechen.

Führt man diese Transformation aus, so geht das System der Gleichungen (9.) und (9'.) in folgendes über

$$(11.) \qquad 3\frac{\partial \varrho}{\partial \omega} + 5\frac{\partial r}{\partial \omega} - (3r + 4\varrho)\frac{\partial \lg X}{\partial \omega} = 0,$$

$$(11'.) \qquad 3\frac{\partial \varrho}{\partial x} + 5\frac{\partial r}{\partial x} - (3r + 4\varrho)\left(\frac{\partial \lg X}{\partial x} - \frac{1}{\varkappa}\right) = 0.$$

Wir haben noch

$$P = X\left[\frac{\partial X}{\partial x}\right] + Y\left[\frac{\partial X}{\partial y}\right] = X\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \text{folglich } \varrho = \frac{\partial X}{\partial x};$$

ferner ist

$$\varrho - r = \left[\frac{\partial X}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial Y}{\partial y}\right] = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{X}{\varkappa}, \qquad \text{also } r = -\frac{X}{\varkappa}.$$

Setzt man nun diese Werte von ϱ und r in die Gleichungen (11.) und (11'.) ein, so erhält man für die Komponente X folgende zwei Gleichungen

$$3\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{2}{\varkappa}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{2}{\varkappa^2}X-\frac{4}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2=0, \tag{12.}$$

$$3\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial\omega}-\frac{2}{\varkappa}\frac{\partial X}{\partial\omega}+\frac{5X}{\varkappa^2}\varphi''(\omega)-\frac{4}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial\omega}\frac{\partial X}{\partial x}\right)=0, \tag{13.}$$

und wenn $X=X_1^{-3}$ gesetzt wird, so gehen diese Gleichungen in die folgenden über

$$9\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}+\frac{6}{\varkappa}\frac{\partial X_1}{\partial x}-\frac{2}{\varkappa^2}X_1=0, \tag{12'.}$$

$$9\frac{\partial^2 X_1}{\partial x\,\partial\omega}-\frac{6}{\varkappa}\frac{\partial X_1}{\partial\omega}-\frac{5}{\varkappa^2}\varphi''(\omega)\,X_1=0; \tag{13'.}$$

die erste dieser Gleichungen enthält keine Ableitung nach ω, sie ist also als eine gewöhnliche Differentialgleichung zu betrachten, und da $dx=d\varkappa$ ist, so kann man sie auch so schreiben

$$9\frac{\partial^2 X_1}{\partial\varkappa^2}+\frac{6}{\varkappa}\frac{\partial X_1}{\partial\varkappa}-\frac{2}{\varkappa^2}X_1=0;$$

das Integral dieser Gleichung ist

$$X_1=\Omega_1\varkappa^{\frac{2}{3}}+\Omega_2\varkappa^{-\frac{1}{3}},$$

also ist

$$X=\frac{\varkappa}{(\Omega_1\varkappa+\Omega_2)^3}, \tag{14.}$$

wo Ω_1, Ω_2 nur von ω abhängen.

Versuchen wir nun mit dem gefundenen Werte von X_1 auch die zweite Gleichung (13'.) zu befriedigen, so finden wir

$$[9\,\Omega_2'+11\,\Omega_1\varphi''(\omega)]\varkappa-\Omega_2\varphi''(\omega)=0,$$

und da die Variable x nur in $\varkappa$ enthalten ist ($\varkappa=x+\varphi'(\omega)$), so folgt

$$\varphi''(\omega)=0 \quad \text{und} \quad \Omega_2'=0;$$

also muß sein: $\varphi(\omega)=\omega\zeta+\eta$ (wo ζ, η Konstanten) und: $\Omega_2=\text{konst.}=c$.

Durch diesen Wert von $\varphi(\omega)$ wird die Gleichung (8.):

$$\frac{x-\zeta}{X}=\frac{y-\eta}{Y};$$

die Richtung der Kraft muß sich also (wenn sie nicht etwa parallel zu sich

selbst bleibt) durch einen festen Punkt (ζ, η) gehen; und wenn man diesen Punkt als Anfangspunkt nimmt, so wird die Gleichung (8.): $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$ und $\varphi(\omega) = 0$, also $\varkappa = x$.

Um nun die Komponenten X, Y der Kraft zu finden, setzen wir

$$X = \frac{x}{\Delta^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = \frac{y}{\Delta^{\frac{3}{2}}}; \tag{15.}$$

dann ist Δ nach (6.) und (7.) eine ganze Funktion zweiten Grades von x und y, und wenn wir beide Werte von Δ aus (7.) und (14.) vergleichen, so finden wir

$$\Delta \equiv S y^2 + 2 S_1 y + S_2 = (\Omega_1 x + c)^2.$$

Differentiieren wir zweimal nach ω, so finden wir (da $y = \omega \cdot x$ ist)

$$\begin{aligned} S y + S_1 &= (\Omega_1 x + c)\, \Omega_1', \\ S x &= (\Omega_1 x + c)\, \Omega_1'' + \Omega_1'^2 \cdot x; \end{aligned} \tag{16.}$$

daraus folgt $$S = \Omega_1 \Omega_1'' + \Omega_1'^2 \text{ und } c\, \Omega_1'' = 0;$$

wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn $c = 0$ ist, so kommt aus (16.)

$$\Omega_1^2 = \lambda \omega^2 + 2 \lambda_1 \omega + \lambda_2,$$

$$S = \lambda, \qquad S_1 = \lambda_1 x, \qquad S_2 = \lambda_2 x^2;$$

also (17.) $$\Delta = \lambda y^2 + 2 \lambda_1 x y + \lambda_2 x^2;$$

Δ ist also in diesem Falle eine beliebige homogene Funktion zweiten Grades von x, y

2. Wenn $\Omega_1'' = 0$ ist, so finden wir aus (16.)

$$S = \lambda^2, \qquad S_1 = \lambda(\lambda_1 x + c), \qquad S_2 = (\lambda_1 x + c)^2;$$

also (18.) $$\Delta = (\lambda y + \lambda_1 x + c)^2;$$

Δ ist also in diesem Falle das Quadrat einer beliebigen ganzen Funktion ersten Grades von x, y.

Wir finden auf diese Weise die von *Darboux* und *Halphen* gegebene Bestimmung der Zentralkräfte, die Kegelschnitte als Bahnen hervorbringen.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, wo die Kraft eine unveränderte Richtung beibehalten soll.

Es sei $Y = \lambda \cdot X$ (λ eine Konstante);

nach (6.) und (7.) ist

$$X = \frac{1}{\Delta_1^{\frac{3}{2}}}, \qquad Y = \frac{\lambda}{\Delta_1^{\frac{3}{2}}}, \tag{19.}$$

wo Δ_1 eine ganze Funktion zweiten Grades von x, y bedeutet; die beiden Gleichungen (9.) und (9′.) geben nun (weil $r = 0$):

$$3\frac{\partial \lg \varrho}{\partial x} - 4\frac{\partial \lg X}{\partial x} = 0, \qquad 3\frac{\partial \lg \varrho}{\partial y} - 4\frac{\partial \lg X}{\partial y} = 0;$$

folglich ist

$$\varrho = C X^{\frac{4}{3}},$$

oder $\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial y}\lambda = C X^{\frac{4}{3}}$, und da $X = \Delta_1^{-\frac{3}{2}}$ ist, so kommt

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} = -\frac{2}{3} C \Delta_1^{\frac{1}{2}}. \tag{20.}$$

Ist nun Δ_1 kein Quadrat, so muß $C = 0$ und $\Delta_1 = \alpha(y - \lambda x)^2 + \beta(y - \lambda x) + \gamma$ sein. Ist aber Δ_1 das Quadrat einer linearen Funktion $\alpha x + \beta y + \gamma$, so bleibt sie ganz beliebig (was mit den Resultaten von *Darboux* und *Halphen* übereinstimmt).

Wir haben im vorigen die Kräfte bestimmt, welche bei beliebigen Anfangslagen und bei Geschwindigkeiten, die zwei gegebene Richtungen haben, Kegelschnitte als Bahnen hervorbringen können. Daß sie dies auch tun, und zwar bei *jeder* Richtung der Anfangsgeschwindigkeiten, geht aus der Übereinstimmung unserer Resultate mit den von *Halphen* und *Darboux* gegebenen hervor, indem sie die Kräfte bestimmten*), die dauernd nach einem festen Punkte gerichtet oder parallel zu sich selbst bleibend, stets Kegelschnitte als Bahnen erzeugen.

Hieraus schließen wir folgenden Satz: „*Wenn eine Kraft bei beliebigen Anfangslagen des Punktes, auf den sie wirkt, und bei Anfangsgeschwindigkeiten, die zwei gegebene Richtungen haben, stets Kegelschnitte als Bahnen erzeugt, so tut sie dasselbe auch bei beliebigen Anfangsgeschwindigkeiten.*“

*) „Comptes Rendus“, année 1877.

Sur la théorie générale des radiales et des anti-radiales.

Par M. *Geminiano Pirondini* à Rome.

1. La définition ordinaire de *radiale* d'une ligne plane*) ne peut pas s'appliquer à toute surface à courbure constante.

Elle peut cependant être généralisée de la façon suivante. $L(A, B, C, \ldots)$ étant une ligne arbitraire tracée sur une surface S à courbure constante, $L_0(A_0, B_0, C_0, \ldots)$ sa développée géodésique et Ω un point quelconque de la surface, que l'on mène une suite de *vecteurs géodésiques*

$$\Omega A_1,\ \Omega B_1,\ \Omega C_1,\ \ldots$$

égaux aux *rayons géodésiques*

$$A_0A,\ B_0B,\ C_0C,\ \ldots$$

et ayant des directions telles, que l'angle infiniment petit de deux vecteurs consécutifs quelconques soit égal à l'angle des rayons correspondants.

La ligne L_1, lieu des points

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ \ldots$$

que l'on vient de construire, est la *radiale* de la ligne L, et celle-ci *l'anti-radiale* de L_1.

Cette définition est applicable textuellement à la radiale ordinaire d'une ligne du plan.

On sait qu'une surface à courbure constante, en tout ce qui concerne l'applicabilité en soi-même, se comporte comme le plan. Suivant cette

*) *R. Tucker.* On radial Curves [Proceedings of the London Mathematical Society. T. I (1865).]

G. Loria. Intorno alle radiali delle curve piane [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. XVI (1902).]

propriété deux lignes différentes L, L_1 tracées sur une surface à courbure constante sont à regarder comme des lignes identiques, pourvu qu'elles possèdent la propriété de pouvoir se réduire l'une à l'autre en superposant par flexion deux portions de la surface l'une à l'autre.

Il s'ensuit que la radiale d'une ligne tracée sur une surface à courbure constante est tout à fait indépendante du choix du point Ω (pôle) et de la direction que l'on donne au vecteur initial.

---

2. Soit

(1.) $$s = \lambda(V)$$

une relation connue liant l'arc s d'une ligne L appartenant à une surface à courbure constante (de rayon a), au rayon vecteur géodésique V, issu d'un point fixe Ω.

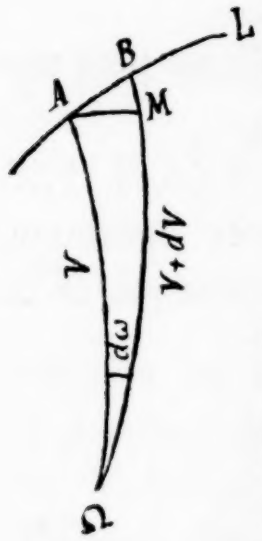


Fig. 1.

Si l'on désigne par

$$\Omega A = V,\ \Omega B = V + dV$$

(Fig. 1) les vecteurs allant aux points infiniment rapprochés A, B de L, par $d\omega$ leur angle infiniment petit et par θ l'inclinaison du vecteur V sur la ligne L, le triangle ΩAB, que l'on peut regarder comme un triangle géodésique, donne l'une des trois relations:

(2.)
$$\begin{cases} \dfrac{\sin(d\omega)}{ds} = \dfrac{\sin\theta}{V+dV}, \\ \dfrac{\sin(d\omega)}{\sin\left(\frac{ds}{a}\right)} = \dfrac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{V+dV}{a}\right)}, \\ \dfrac{\sin(d\omega)}{\operatorname{sh}\left(\frac{ds}{a}\right)} = \dfrac{\sin\theta}{\operatorname{sh}\left(\frac{V+dV}{a}\right)}, \end{cases}$$

suivant que la courbure de la surface est nulle, positive ou négative. Centre en Ω, avec le rayon géodésique ΩA, décrivons l'arc de cercle géodésique AM compris entre les vecteurs ΩA, ΩB. Si l'on rappelle la relation (1.), le triangle infiniment petit ABM donne

$$\cos\theta = \frac{BM}{AB} = \frac{dV}{ds},$$

d'où il suit

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\lambda'^2(V)-1}}{\lambda'(V)}.$$

D'ailleurs, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut écrire:

$$\sin(d\omega) = d\omega, \qquad \sin\left(\frac{ds}{a}\right) = \frac{ds}{a}, \qquad \mathrm{sh}\left(\frac{ds}{a}\right) = \frac{ds}{a},$$

$$\sin\left(\frac{V+dV}{a}\right) = \sin\left(\frac{V}{a}\right), \qquad \mathrm{sh}\left(\frac{V+dV}{a}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{V}{a}\right).$$

Si donc on porte ces valeurs dans les équations (2.), on trouve après une intégration:

$$\begin{cases} \omega - \omega_0 = \int \dfrac{\sqrt{\lambda'^2(V)-1}}{V}\cdot dV, \\ \omega - \omega_0 = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{\sqrt{\lambda'^2(V)-1}}{\sin\left(\frac{V}{a}\right)}\cdot dV, \\ \omega - \omega_0 = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{\sqrt{\lambda'^2(V)-1}}{\mathrm{sh}\left(\frac{V}{a}\right)}\cdot dV, \end{cases}$$

ω_0 étant une constante arbitraire.

Or, une relation finie quelconque entre les coordonnées polaires géodésiques (R, ω) d'une surface à courbure constante, définit une ligne indépendamment de la géodésique que l'on prend pour axe polaire et de la position du pôle sur cet axe.

Il s'ensuit que: *Sur une surface à courbure constante, toute relation finie entre l'arc et le rayon vecteur géodésique issu d'un point fixe, caractérise une ligne.*

En supposant par exemple

$$s = mV + n,$$

m et n étant des constantes, on déduit

$$\cos\theta = \frac{1}{m} = \text{constante},$$

et vice versa.

Cela démontre qu'*une relation linéaire entre s et V caractérise une trajectoire isogonale du faisceau de géodésiques issues du pôle.* (Cette trajectoire est une *spirale logarithmique* dans le plan, une *loxodromie* dans la sphère, etc.)

3. Si l'on désigne par

$$\varrho,\ \tau,\ \varrho_g$$

les rayons de courbure absolue, de torsion et de courbure géodésique d'une ligne L située sur une sphère de rayon a, et par r le rayon sphérique (c'est-à-dire l'arc de grand cercle normal, compris entre la ligne L et son évolue géodésique), on a les formules

$$\varrho^2 + \tau^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = a^2, \tag{3.}$$

$$\varrho_g = a \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{a\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}, \tag{4.}$$

d'où il suit

$$\varrho = a \sin\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$\tau = \frac{a}{\left(\frac{dr}{ds}\right)}. \tag{5.}$$

Si l'on remarque que la forme d'une ligne à double courbure est connue aussitôt que l'on a les rayons de courbure et de torsion exprimés par des fonctions finies de l'arc, on a le théorème: *Une ligne tracée sur une sphère est complètement définie, à un déplacement près, lorsqu'on connaît une relation finie quelconque entre l'arc s et le rayon géodésique r.*

---

4. Ce résultat subsiste pour toute surface à courbure constante positive; car une telle surface est toujours applicable par flexion à une sphère de même rayon. Mais l'on peut démontrer qu'il en est de même de toute surface à courbure constante. En supposant que

$$r = f(s) \tag{6.}$$

soit la relation liant le rayon géodésique r de la ligne à l'arc s, que l'on trace, sur la surface considérée, une suite continue de géodésiques

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots$$

sous les conditions:

1° — que l'inclinaison infiniment petite $d\varepsilon$ de deux géodésiques consécutives quelconques ait une des expressions

$$d\varepsilon = \frac{ds}{r}, \qquad d\varepsilon = \frac{ds}{a \cdot \sin\left(\frac{r}{a}\right)}, \qquad d\varepsilon = \frac{ds}{a \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{r}{a}\right)},$$

suivant que la courbure de la surface est nulle, positive ou négative.

2° — que, si l'on désigne par A_n le point de rencontre des géodésiques infiniment rapprochées g_n, g_{n+1}, il résulte

$$A_n A_{n+1} = f'(s) \cdot ds,$$

quel que soit n.

Cela posé, que l'on prenne l'arc

$$A_1 B_1 = f(s_1)$$

sur la géodésique initiale g_1, s_1 étant la valeur de l'arc s qui correspond à la géodésique g_1. Il est clair que la trajectoire orthogonale des géodésiques g passant par le point B_1 est une ligne vérifiant la relation (6.).

Une pareille construction, effectuée à partir d'un autre système de géodésiques, conduit à une autre ligne L' qui peut être réduite à la ligne L par de simples flexions de la surface. Les lignes L, L_1 sont donc à considérer comme des lignes identiques entre elles (§ 1).

Par conséquent: *Une ligne tracée sur une surface à courbure constante est entièrement définie par une relation finie quelconque entre l'arc s et le rayon géodésique r.*

En généralisant ce que l'on fait dans le plan, les variables (r, s) peuvent s'appeler les *coordonnées intrinsèques* de la ligne tracée sur la surface.

---

5. *Recherche de la radiale* — Si

(7.) $$s = F(r)$$

est l'équation définissant la ligne L et AA_0, BB_0 sont deux rayons géodésiques consécutifs, inclinés entre eux de l'angle infiniment petit $d\varepsilon$, on a l'une ou l'autre des relations suivantes:

(8.)
$$\begin{cases} ds = F'(r) \cdot dr = a \cdot \sin\left(\frac{r}{a}\right) \cdot d\varepsilon, \\ \\ ds = F'(r) \cdot dr = a \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{r}{a}\right) \cdot d\varepsilon, \end{cases}$$

suivant que la courbure de la surface est positive ou négative. Si l'on dé-

duit d'ici $d\varepsilon$ et ensuite ε par intégration, en remarquant en outre que l'on a

$$V = r, \qquad \omega = \varepsilon$$

en vertu de la loi même de construction de la radiale, on conclut: *Quand la ligne L est représentée (en coordonnées intrinsèques) par l'équation* (7.), *la radiale L_1 est définie (en coordonnées polaires géodésiques) par l'une ou l'autre des équations:*

$$\omega = \frac{1}{a}\int \frac{F'(V)}{\sin\left(\frac{V}{a}\right)} \cdot dV, \tag{9.}$$

$$\omega = \frac{1}{a}\int \frac{F'(V)}{\mathrm{sh}\left(\frac{V}{a}\right)} \cdot dV, \tag{10.}$$

suivant que la courbure de la surface est positive ou négative.

En supposant que L croisse jusqu'à l'infini, on trouve à la limite les formules données par M. *Loria**).

Si l'équation de la ligne a n'est pas résoluble par rapport à s, la méthode que l'on vient d'exposer n'est pas applicable. Dans ce cas on peut faire usage des formules (8.) qui, en vertu de la relation

$$d\varepsilon = d\omega,$$

donnent respectivement

$$\omega = \frac{1}{a}\int \frac{ds}{\sin\left(\frac{r}{a}\right)}, \tag{11.}$$

$$\omega = \frac{1}{a}\int \frac{ds}{\mathrm{sh}\left(\frac{r}{a}\right)} \tag{12.}$$

On voit d'ici que: *La radiale de la ligne définie par l'équation intrinsèque*

$$r = r(s),$$

est représentée (en coordonnées polaires géodésiques) par l'équation résultant de l'élimination de s entre l'équation

$$V = r(s)$$

et l'équation (11.) *ou* (12.), *suivant que la courbure de la surface est positive ou négative.*

---

*) Lieu cité, § II.

6. *Exemples.* — 1°. *On demande la radiale de la ligne sphérique à torsion constante.*

En supposant

$$\tau = \text{constante} = k,$$

l'équation (5.) donne par intégration

$$s = \frac{k}{a} r = F(r)$$

et l'équation (9.)

$$\omega = \frac{k}{a} \log \operatorname{tang} \left(\frac{V}{2a}\right).$$

Il s'ensuit que *la radiale cherchée est représentée (en coordonnées polaires sphériques) par l'équation*

(13.) $$\operatorname{tang}\left(\frac{V}{2a}\right) = e^{\frac{a}{k}\cdot\omega}.$$

Projetons la ligne sphérique (13.) sur le plan tangent au point Ω, par des rayons issus du point P diamétralement opposé à Ω. La ligne plane que l'on obtient, étant représentée par l'équation polaire

$$R = 2a \cdot e^{\frac{a}{k}\omega},$$

est une spirale logarithmique ayant le pôle Ω.

Si l'on rappelle la propriété caractéristique de la spirale logarithmique et la propriété de la projection stéréographique de conserver les angles, on conclut que: *La radiale de la ligne sphérique à torsion constante est une loxodromie.*

2°. — *Sur une surface à courbure constante déterminer la radiale d'une développante géodésique d'un cercle géodésique.*

La surface soit d'abord une sphère; comme sur cette surface la développante géodésique d'un petit cercle est une hélice cylindrique, on doit avoir la relation

$$\frac{\varrho}{\tau} = \cot i,$$

i étant l'inclinaison (constante) de l'hélice sur les génératrices du cylindre.

En introduisant cette condition dans l'équation (3.), on déduit après une intégration

$$-\sqrt{a^2 - \varrho^2} = s \cdot \cot i.$$

Si donc on a recours à l'équation (4.), exprimant r en fonction de ϱ, on trouve que l'arc sphérique r et l'arc s de la ligne sont liés entre eux par la relation

$$s = F(r) = -a \operatorname{tang} i \cdot \cos\left(\frac{r}{a}\right).$$

Bien que celle-ci ait été démontrée pour la sphère, elle subsiste néanmoins pour *toute* surface à courbure constante positive. En effet, quelle que soit la déformation par flexion à laquelle on soumet la sphère, les éléments r, s relatifs à une ligne quelconque de cette surface ne changent pas; il doit donc être le même de la relation liant ces éléments.

Seulement il est à remarquer qu'aussitôt que la surface, par suite d'une déformation, perd la forme sphérique, la constante i n'a plus la signification géométrique particulière qu'elle avait auparavant.

Cette analyse, par l'application de l'équation (9.), conduit au théorème: *Sur une surface à courbure constante positive la radiale d'une développante géodésique d'un cercle géodésique est définie (en coordonnées polaires) par l'équation*:

$$V = \frac{a}{\operatorname{tang} i} \cdot \omega. \tag{14.}$$

Dans le cas de la sphère, la radiale (14.) peut être obtenue en projetant du centre la ligne tracée sur le plan tangent au point Ω, et définie par l'équation polaire

$$R = a \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{\omega}{\operatorname{tang} i}\right).$$

On voit d'ici que la radiale sphérique est une ligne algébrique dans tout cas où la ligne plane correspondante est aussi algébrique.

En supposant que le rayon de la surface croisse indéfiniment, le théorème précédent revient à l'autre: *Dans le plan la radiale d'une développante de cercle est une spirale d'Archimède.*

---

7. *Recherche de l'anti-radiale.* — La radiale L_1 soit représentée par l'équation

$$\omega = f(V), \tag{15.}$$

en coordonnées polaires géodésiques.

Comme l'angle infiniment petit $d\varepsilon$ compris entre deux rayons géodésiques consécutifs de l'anti-radiale L (inconnue) est égal à la différentielle de l'angle polaire ω, on a la relation

$$d\varepsilon = d\omega = f'(V) \cdot dV,$$

de laquelle, en remarquant que $V = r$, on dérive

$$d\varepsilon = f'(r) \cdot dr.$$

Si donc on a recours aux équations (8.), on déduit le théorème: *Sur une surface à courbure constante la ligne définie (en coordonnées polaires) par l'équation* (15.), *a pour anti-radiale la ligne L représentée (en coordonnées intrinsèques) par l'une ou l'autre des équations:*

$$s = a \int f'(r) \cdot \sin\left(\frac{r}{a}\right) \cdot dr, \tag{16.}$$

$$s = a \int f'(r) \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{r}{a}\right) \cdot dr, \tag{17.}$$

suivant que la courbure de la surface est positive ou négative.

En passant ici à la limite pour $a = \infty$, on tombe sur les formules données par M. *Loria.**)

Quand l'équation de la radiale L_1 n'est pas résoluble par rapport à ω, la méthode que l'on vient d'exposer n'est pas applicable. En supposant, dans ce cas, de pouvoir écrire l'équation de la ligne L_1 de la façon suivante

$$V = F(\omega), \tag{18.}$$

puisqu'on a

$$r = V, \qquad d\varepsilon = d\omega,$$

les formules (8.), exprimant l'arc élémentaire de l'anti-radiale, deviennent

$$ds = a \cdot \sin\left(\frac{V}{a}\right) d\omega,$$

$$ds = a \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{V}{a}\right) d\omega.$$

On voit donc que: *Si la radiale est définie par l'équation polaire* (18.), *l'anti-radiale est représentée [en coordonnées intrinsèques (r, s)] par l'équation résultant de l'élimination de* ω *entre l'une ou l'autre des couples d'équations:*

*) Lieu cité, § III.

$$(19.) \qquad s = a\int \sin\left[\frac{F(\omega)}{a}\right]\cdot d\omega, \qquad r = F(\omega),$$

$$(20.) \qquad s = a\int \operatorname{sh}\left[\frac{F(\omega)}{a}\right]\cdot d\omega, \qquad r = F(\omega),$$

suivant que la courbure de la surface est positive ou négative.

Dans le cas du plan, $a = \infty$ et les formules (19.), (20.) sont remplacées par les autres:

$$(21.) \qquad s = \int F(\omega)\cdot d\omega, \qquad r = F(\omega).$$

Remarque. — L'analyse que l'on vient d'exposer aux §§ 5 et 7 démontre que: *Sur une surface à courbure constante la radiale et l'anti-radiale sont liées entre elles de façon que l'une de ces lignes définit complètement l'autre.*

Cette remarque, appliquée au premier exemple du § 6, démontre que: *Sur une surface à courbure constante positive l'anti-radiale d'une trajectoire isogonale d'un faisceau de géodésiques issues d'un point fixe, est une ligne représentée par une relation linéaire entre les coordonnées intrinsèques (r, s).*

Cette ligne, à l'instant où la surface s'applique par flexion à une sphère (ce qui est toujours possible) acquiert une torsion constante.

---

8. *Exemples.* — 1°. *Déterminer l'anti-radiale d'une géodésique d'une surface à courbure constante.*

Rapportons la géodésique L_1 à un axe polaire géodésique g normal à L_1 et à un pôle Ω placé sur g à la distance $\Omega M = k$ de la ligne L_1

A_1 étant un point quelconque de L_1, on a

$$\Omega A_1 = V, \qquad M\hat{\Omega}A_1 = \omega,$$

et le triangle géodésique rectangle ΩMA donne:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{V}{a}\right)\cos\omega = \operatorname{tang}\left(\frac{k}{a}\right)$$

ou bien

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{V}{a}\right)\cos\omega = \operatorname{tgh}\left(\frac{k}{a}\right),$$

suivant que la courbure de la surface est positive ou négative. En remarquant que $V = r$, ces formules, résolues par rapport à ω, donnent respectivement:

$$\omega = f(r) = \text{arc} \cdot \cos\left[\frac{\text{tang}\left(\frac{k}{a}\right)}{\text{tang}\left(\frac{r}{a}\right)}\right],$$

$$\omega = f(r) = \text{arc} \cdot \cos\left[\frac{\text{tgh}\left(\frac{k}{a}\right)}{\text{tgh}\left(\frac{r}{a}\right)}\right].$$

Si l'on dérive ces égalités par rapport à r et que l'on ait ensuite recours aux équations (16.), (17.), on trouve respectivement

$$s = \text{sin}\left(\frac{k}{a}\right)\int \frac{dr}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{k}{a}\right) - \cos^2\left(\frac{r}{a}\right)}},$$

$$s = \text{sh}\left(\frac{k}{a}\right)\int \frac{dr}{\sqrt{\text{ch}^2\left(\frac{r}{a}\right) - \text{ch}^2\left(\frac{k}{a}\right)}}.$$

Telles sont les équations (en coordonnées intrinsèques) de l'anti-radiale cherchée, dans les hypothèses que la courbure de la surface soit positive ou négative.

2°. — *Si l'on demande l'anti-radiale de la ligne plane représentée par l'équation polaire*

$$R = F(\omega) = a e^{\frac{\omega}{m}} + b \cdot \cos\left(\frac{\omega}{m}\right)$$

(non résoluble par rapport à ω), il suffit de remarquer que l'on a ici

$$s = \int F(\omega) \cdot d\omega = a m \cdot e^{\frac{\omega}{m}} + b m \cdot \text{sin}\left(\frac{\omega}{m}\right),$$

pour voir que *l'équation de la ligne cherchée, en coordonnées intrinsèques (r, s), est le résultat de l'élimination de* $\left(\frac{\omega}{m}\right)$ *entre les équations*

$$\begin{cases} \dfrac{\omega}{m} = \text{arc} \cdot \text{sin}\left[\dfrac{s - mr \pm \sqrt{2b^2m^2 - (s - mr)^2}}{2bm}\right]. \\ 2a^2m^2 \cdot e^{\frac{2\omega}{m}} - 2am \cdot (mr + s) \cdot e^{\frac{\omega}{m}} + (m^2r^2 + s^2 - b^2m^2) = 0. \end{cases}$$

9. Les formules que nous allons établir dans ce paragraphe, sont particulièrement remarquables en ce qu'elles, sous une forme unique, sont applicables indifférement aux trois familles de surfaces à courbure constante.

Soient: L une ligne tracée sur une surface à courbure constante, L_0 son évolue géodésique et L_1 la radiale de L par rapport au pôle Ω.

Après avoir mené (Fig. 2) les vecteurs géodésiques consécutifs ΩA_1, ΩB_1 de la radiale L_1, décrivons l'arc de cercle géodésique A_1M compris entre les vecteurs, et ayant le centre Ω et le rayon ΩA_1. Les secteurs géodésiques A_0AB, ΩA_1M sont évidemment superposables, et conséquemment on a

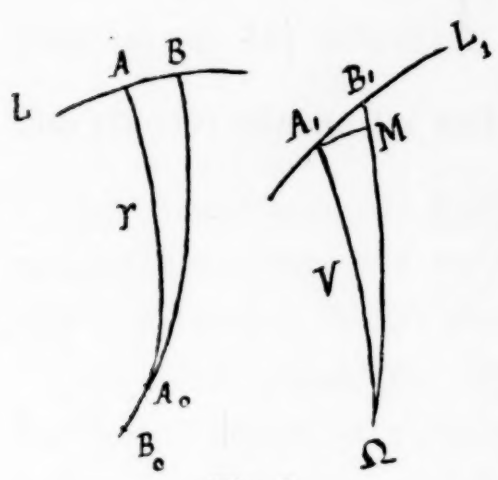


Fig. 2.

$$ds = AB = A_1M, \quad B_1M = dV = dr.$$

Le triangle rectangle A_1MB_1 infiniment petit nous donne

$$ds_1 = \sqrt{ds^2 + dr^2} = \sqrt{1 + r'^2(s)} \cdot ds,$$

d'où il suit par intégration:

$$s_1 + c = \int \sqrt{1 + r'^2(s)} \cdot ds, \tag{22.}$$

c étant une constante arbitraire.

On a donc le théorème: *Sur une surface à courbure constante quelconque la ligne L représentée par l'équation*

$$r = r(s)$$

en coordonnées intrinsèques, a pour radiale la ligne définie [en coordonnées (V, s_1)] par l'équation résultant de l'élimination de s entre les équations:

$$V = r(s), \qquad s_1 = \int \sqrt{1 + r'^2(s)} \cdot ds. \tag{23.}$$

Si l'on suppose

$$s_1 = F(V), \tag{24.}$$

F étant un symbole fonctionnel connu, les relations (23.) nous donnent

$$\int \sqrt{1 + r'^2(s)} \cdot ds = F(r).$$

Et comme on déduit d'ici

$$ds = \sqrt{F'^2(r) - 1} \cdot dr,$$

on conclut: *Quelle que soit la surface à courbure constante, l'anti-radiale de la ligne* (24.) *est définie par l'équation*

$$s = \int \sqrt{F'^2(r) - 1} \cdot dr. \tag{25.}$$

En posant

$$\int \sqrt{F'^2(r) - 1} \cdot dr = f(r),$$

on trouve

$$F(r) = \int \sqrt{f'^2(r) + 1} \cdot dr.$$

Si donc on remplace ici le rayon géodésique r par le vecteur géodésique V et que l'on ait regard à la relation (24.), on arrive au résultat suivant: *Quelle que soit la surface à courbure constante, la radiale de la ligne représentée par l'équation intrinsèque*

$$s = f(r)$$

est définie [en coordonnées (V, s_1)*] par l'équation*

$$s_1 = \int \sqrt{f'^2(V) + 1} \cdot dV. \tag{26.}$$

---

10. *Exemple.* — Si

$$f(r) = mr,$$

m étant une constante, l'équation (26.) revient à l'autre:

$$s_1 = \sqrt{1 + m^2} \cdot V. \tag{7.}$$

En supposant, vice versa

$$F(V) = nV, \qquad (n = \text{constante})$$

on déduit de l'équation (25.)

$$s = \sqrt{n^2 - 1} \cdot r. \tag{28.}$$

Il s'ensuit que: *Sur toute surface à courbure constante, la ligne définie par une relation linéaire entre les coordonnées intrinsèques, a pour radiale une ligne dont l'équation [en coordonnées* (V, s_1)*] est aussi linéaire. Et vice versa.*

Dans le plan le théorème précédent revient à l'autre: *Une spirale logarithmique a pour radiale une autre spirale logarithmique.*

Sur une sphère l'équation (27.) définit une loxodromie (§ 2) et l'équation (28.) une ligne à torsion constante (§ 6).

On tombe ainsi sur le théorème démontré au § 6 (Premier exemple).

---

11. Voici quelques méthodes applicables au plan.

A. — Si l'on définit la ligne L par l'équation

(29.) $$\varrho = \varrho(s)$$

en coordonnées intrinsèques, la relation (22.) se réduit à l'autre:

(30.) $$s_1 + c = \int \sqrt{1 + \varrho'^2} \cdot ds.$$

En outre le rayon de courbure ϱ_1 de la radiale L_1 est lié au rayon vecteur R_1 par la relation

(31.) $$\varrho_1 = \frac{R_1 \sqrt{1 - \left(\frac{dR_1}{ds_1}\right)^2}}{1 - \left(\frac{dR_1}{ds_1}\right)^2 - R_1 \frac{d^2 R_1}{ds_1^2}}.$$

Et comme

$$\frac{dR_1}{ds_1} = \frac{\varrho'}{\sqrt{1 + \varrho'^2}}, \qquad \frac{d^2 R_1}{ds_1^2} = \frac{\varrho''}{(1 + \varrho'^2)^2},$$

on déduit que: *La radiale de la ligne plane* (29.) *est représentée [en coordonnées intrinsèques* (ϱ_1, s_1)*] par l'équation résultant de l'élimination de* s *entre l'équation* (30.) *et l'autre*:

(32.) $$\varrho_1 = \frac{\varrho(1 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + \varrho'^2 - \varrho\varrho''}.$$

B. — En appliquant la relation (31.) à l'anti-radiale L et en remarquant en outre que le rayon vecteur R_1 et l'angle polaire ω de la radiale vérifient les équations

$$R_1 = \varrho, \qquad d\omega = \frac{ds}{\varrho},$$

on conclut que: *La ligne plane* L *définie par la relation*

$$R = R(s)$$

entre le rayon vecteur et l'arc, a pour radiale la ligne representée (en coordonnées polaires) par l'équation résultant de l'élimination de s *entre les équations:*

$$R_1 = \frac{R\sqrt{1-R'^2}}{1-R'^2-RR''}, \qquad \omega - \omega_0 = \int \frac{1-R'^2-RR''}{R\sqrt{1-R'^2}} \cdot ds.$$

C. — La méthode suivante est particulièrement remarquable, car elle n'exige pas d'intégrations, mais seulement des dérivations. Les coordonnées rectangulaires (x, y) d'un point quelconque d'une ligne plane L s'expriment en fonction de l'arc s par les relations

$$x = x(s), \qquad y = \int \sqrt{1-x'^2(s)} \cdot ds.$$

Si donc on désigne par ϱ le rayon de courbure de la ligne L et par (λ, μ) les inclinaisons de la normale sur les axes coordonnés, on a

$$\varrho = \frac{\sqrt{1-x'^2}}{x''}, \quad \cos\lambda = \varrho x'' = \sqrt{1-x'^2}, \quad \cos\mu = \varrho y'' = -x';$$

de sorte que les coordonnées (x_1, y_1) d'un point quelconque de la radiale ont pour expression:

$$x_1 = \varrho\cos\lambda = \frac{1-x'^2}{x''}, \qquad y_1 = \varrho\cos\mu = -\frac{x'\sqrt{1-x'^2}}{x''}.$$

Si donc on établit un système de coordonnées polaires (R_1, ω) ayant pour axe polaire l'axe des x et pour pôle l'origine, on a les relations

$$R_1 = \frac{\sqrt{1-x'^2}}{x''}, \qquad \operatorname{tang}\omega = -\frac{x'}{\sqrt{1-x'^2}}.$$

L'élimination de s entre ces équations, conduit à l'équation de la radiale, en coordonnées polaires.

S'il s'agit, par exemple, de déterminer la radiale de la ligne plane

$$y = \frac{x\sqrt{4x^2-a^2}}{2a} - \frac{a}{4}\log\left(2x+\sqrt{4x^2-a^2}\right),$$

on transforme d'abord cette équation, en y introduisant les coordonnées (x, s), ce qui conduit à la relation très simple

$$x = \sqrt{as}.$$

L'application du procédé indiqué conduit aux équations

$$R_1 = -\frac{2s\sqrt{4as-a^2}}{a}, \qquad \operatorname{tang}\omega = -\frac{a}{\sqrt{4as-a^2}},$$

d'où l'on tire:

$$R_1 = \frac{a\cos\omega}{2\sin^3\omega}.$$

Telle est l'équation polaire de la radiale cherchée.

Celle-ci est une ligne algébrique du sixième ordre, représentée par l'équation cartésienne

$$a^2 x_1^{\,2}(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}) - 4y_1^{\,6} = 0.$$

---

12. On peut, à l'aide des formules précédentes, déterminer *directement* la deuxième radiale d'une ligne plane.

En désignant en effet par R_2 et ε le rayon vecteur et l'angle polaire de la deuxième radiale L_2 de L, on a

$$R_2 = \varrho_1, \qquad d\varepsilon = \frac{ds_1}{\varrho_1}.$$

Si donc on rappelle les relations (22.), (32.), on arrive au résultat:

La deuxième radiale de la ligne plane

$$\varrho = \varrho(s)$$

est représentée (en coordonnées polaires) par l'équation résultant de l'élimination de s entre les équations

$$R_2 = \frac{\varrho\,(1+\varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{1+\varrho'^2-\varrho\varrho''},$$

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \int \frac{1+\varrho'^2-\varrho\varrho''}{\varrho\,(1+\varrho'^2)}\,ds = \int \frac{ds}{\varrho} - \text{arc}\cdot\text{tang}\left(\frac{d\varrho}{ds}\right).$$

Remarque finale. — A cause du lien intime existant entre la géométrie des surfaces à courbure constante de l'espace euclidien à trois dimensions et les géométries non-euclidiennes, ce travail peut être interprété comme une étude sur les radiales et les anti-radiales des lignes tracées sur les plans euclidien, riemannien, lobatschewskien.

Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement.

Par M. *Paul Appell* à Paris.

1. Dans un discours, prononcé à Cherbourg, en 1905, au congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, *Sur quelques questions de mécanique rationnelle*,*) j'ai attiré l'attention, de la façon suivante, sur une propriété que présentent les systèmes matériels à frottement:

> Peut-être existe-t-il, pour le frottement, un principe caché qu'on pourra dégager des faits suivants: il semble que, dans beaucoup de cas, le mouvement d'un système à frottement se fait de façon que le travail dû au frottement diminue de plus en plus en valeur absolue; il semble, en d'autres termes, que le système cherche à échapper au frottement. C'est ainsi qu'un cerceau ou une boule qui glissent finissent par rouler, qu'une toupie arrondie lancée sur un plan horizontal se redresse de façon que la force de frottement soit appliquée à un parallèle de plus en plus petit, etc... Il y aurait grand intérêt à réunir ces observations dans un énoncé précis, résumant sous ce nouveau point de vue les effets du frottement.

M. *Lecornu* a étudié cette propriété des systèmes matériels, sur un exemple assez général, dans une Note aux Comptes Rendus (1906, second semestre, p. 1132) et dans un article plus détaillé du Bulletin de la Société mathématique de France (t. XXXV, p. 3, 1907) *Sur l'extinction du frottement.*

2. Il me semble, que la propriété en question peut s'expliquer par les considérations générales suivantes, dont j'ai donné une indication sommaire dans le Bulletin de la Société mathématique (t. XXXV, p. 131, 1907.)

Imaginons un système matériel présentant les caractères suivants, qui se trouvent réalisés dans la plupart des systèmes usuels.

*) Bulletin mensuel de l'Association nº 8, octobre 1905.

1° Le système considéré est d'abord assujetti à des liaisons quelconques, sans frottement, indépendantes du temps;

2° Il est soumis à des forces intérieures dérivant d'un potentiel Π qui est positif ou nul dans toutes les configurations possibles du système et qui devient *nul* dans une configuration spéciale, constituant une configuration d'équilibre stable du système sous l'action des seules forces intérieures;

3°. Le système comprend des corps solides ou des points qui glissent, avec frottement, les uns sur les autres, ou sur des corps solides fixes;

4° Il est soumis enfin à d'autres forces extérieures dérivant d'une fonction U, qui reste inférieure à une limite fixe L, pour toutes les positions du système dans lesquelles subsiste un contact au moins donnant lieu à frottement.

Le système étant ainsi défini, le théorème des forces vives donne l'équation

$$(1.) \qquad d(T+\Pi-U)=-f_1 N_1 v_1 dt-f_2 N_2 v_2 dt-\cdots-f_p N_p v_p dt,$$

où T est la demi-force vive, où $f_1, f_2, \ldots f_p$ sont les coefficients de frottement, $N_1, N_2, \ldots N_p$ les valeurs absolues des réactions normales, $v_1, v_2, \ldots v_p$ les valeurs des vitesses de glissement relatives des points matériels au contact dans les divers corps frottants associés deux à deux.

Si nous posons, pour abréger,

$$(2.) \qquad \Phi=f_1 N_1 v_1+f_2 N_2 v_2+\cdots+f_p N_p v_p,$$

nous voyons que cette quantité Φ, formée d'une somme de termes positifs ou nuls, est essentiellement positive et ne peut devenir nulle que si tous les termes qui la composent deviennent nuls à la fois.

L'équation des forces vives

$$(3.) \qquad d(T+\Pi-U)=-\Phi dt,$$

montre, que la quantité Φ *tend vers zéro.*

Nous allons démontrer, en effet, qu'il est absurde de supposer que Φ reste, dans la suite des temps, supérieur à une limite fixe λ supérieure à 0. Si l'on avait

$$\Phi>\lambda>0,$$

on aurait, d'après l'équation des forces vives,

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi-U)<-\lambda,$$

d'où, en intégrant

$$T+\Pi-U<-\lambda t+C, \tag{4.}$$

C désignant une constante. Comme U est limité, $U<L$, on en déduirait:

$$T+\Pi<-\lambda t+C+L. \tag{5.}$$

Quand t augmente indéfiniment, le second membre prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue. Donc $T+\Pi$ devrait devenir de plus en plus petit: cette quantité, formée de deux termes positifs à l'instant initial, finirait donc par devenir *nulle* au bout d'un temps fini. A ce moment Π serait nul et la demie force vive T également; donc *toutes les vitesses s'annuleraient au bout d'un temps fini* dans la configuration spéciale où le potentiel Π est *nul.*

Mais cette conclusion est contradictoire avec l'hypothèse faite

$$\Phi>\lambda>0,$$

car, toutes les vitesses devenant nulles, Φ deviendrait nul et ne pourrait rester supérieur à λ.

Il est donc démontré que, t croissant, Φ *tend vers zéro.* Les divers termes

$$f_1 N_1 v_1,\ f_2 N_2 v_2, \ldots f_p N_p v_p$$

de Φ tendent donc, tous en même temps, vers zéro.

Donc, certaines des réactions, $N_1, N_2, \ldots N_k$, par exemple, tendront vers *zéro*; le système tendra à abandonner les liaisons avec frottement d'où proviennent ces réactions. En même temps les vitesses des autres points frottants $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots v_p$ tendront vers *zéro* et les glissements correspondants tendront à disparaître.

Le système, dans son ensemble, cherchera donc bien à échapper au frottement.

3. Nous avons adopté, pour plus de simplicité, les lois pratiques du frottement de glissement. Mais les mêmes conclusions subsistent pourvu que l'on admette la loi générale suivante: la force de frottement de glissement d'un corps solide A sur un corps solide B, regardé comme immobile,

est une force F, essentiellement positive, dirigée en sens contraire de la vitesse v du point en contact et s'annulant seulement si la réaction normale s'annule. En effet, dans ces conditions, le travail élémentaire de F est $-Fv\,dt$, expression essentiellement négative qui s'annule seulement quand la réaction normale ou la vitesse de glissement s'annulent.

4. Nous avons envisagé seulement le frottement de glissement. Mais les mêmes considérations s'étendent au frottement de roulement et au frottement de pivotement. Pour s'en assurer, il suffit de remarquer, pour le frottement de roulement, par exemple, que le travail élémentaire effectué par les forces provenant du frottement de roulement est de la forme $-K\,dt$, K étant une quantité positive qui s'annule seulement si le roulement cesse ou si les deux corps qui roulent l'un sur l'autre se séparent.

5. Il va de soi que les réactions sont supposées finies. On voit aussi que l'expression *tendre vers zéro* doit être entendue dans le sens suivant. La quantité Φ et les autres grandeurs analogues varient de telle façon qu'il existe toujours une suite de valeurs de t pour lesquelles elles soient plus petites que tout nombre positif donné, si petit soit-il. Il peut arriver que Φ varie en oscillant et on ne peut rien dire a priori de sa limite superieure; un raisonnement analogue au précédent montre que l'intégrale $\int_{t_0}^{t} \Phi\,dt$ reste finie, ce qui donne une indication sur le mode *d*e variation de Φ.

Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.

Premier Mémoire.

Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites.

Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie.

Introduction.

Hermite avait introduit dans la théorie des nombres un principe nouveau et fécond, à savoir: étant donné un ensemble (X) des systèmes $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ des valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$, on fait correspondre à l'ensemble (X) un ensemble (R) composé des domaines déterminés à l'aide des paramètres continus $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ de manière qu' en étudiant l'ensemble (R) on étudie en même temps l'ensemble (X).

Hermite a montré*) de nombreuses applications du nouveau principe pour la généralisation des fractions continues, pour la recherche des unités algébriques etc.

Les idées d'*Hermite* ont été développées dans les travaux de M. M. *Zolotareff*, *Charve*, *Selling*, *Minkowski*.**)

---

*) *Hermite.* Extraits de lettres de M. *Ch. Hermite* à M. *Jacobi* sur différents objets de la théorie des nombres. (Ce Journal t. 40, p. 261.)

Hermite. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. (Ce Journal t. 41, p. 191.)

Hermite. Sur la théorie des formes quadratiques. (Ce Journal t. 47, p. 313.)

**) *Zolotareff.* Sur une équation indéterminée du troisième degré. (Pétersbourg, 1869, *en russe.*)

Zolotareff. Théorie des nombres entiers complexes avec des applications au calcul intégral. (Pétersbourg, 1874, *en russe.*)

Je me propose de publier une série de Mémoires dans lesquels je vais exposer de nouvelles applications du principe d'*Hermite* aux différents problèmes de la théorie arithmétique des formes quadratiques définies et indéfinies.

Dans ce Mémoire, j'étudie les propriétés du minimum arithmétique des formes quadratiques positives et de ses différentes représentations par des systèmes de nombres entiers.

Hermite a découvert une propriété importante du minimum M des formes quadratiques positives $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ à n variables et du déterminant D, à savoir:

$$M \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D},$$

et il a montré de nombreuses applications de cette formule.

Dans une lettre à *Jacobi*, *Hermite* a dit:*)

„Ce qui précède, indique suffisamment une infinité d'autres conséquences analogues qui, toutes, viennent dépendre de la recherche difficile d'une limite précise du minimum d'une forme définie quelconque. Là-dessus je ne puis former qu'une conjecture. Mes premières recherches dans le cas d'une forme à n variables du déterminant D m'avaient donné la limite $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D}$, je suis porté à présumer, mais sans pouvoir le démontrer que le coefficient numérique $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ doit être remplacé par $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$.“

M. M. *Korkine* et *Zolotareff* ont entrepris la recherche de la limite précise du minimum des formes quadratiques positives de même déterminant.

En désignant par $M(a_{ij})$ le minimum et par $D(a_{ij})$ le déterminant de la forme $\Sigma a_{ij} x_i x_j$, on aura le minimum

$$\mathfrak{M}(a_{ij}) = \frac{M(a_{ij})}{\sqrt[n]{D(a_{ij})}}$$

d'une forme quadratique positive à déterminant 1.

Charve. De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisième degré. (Suppl. au t. IX des Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1880.)

Selling. Über die binären und ternären quadratischen Formen. (Ce Journal t. 77, p. 143.)

Minkowski. Geometrie der Zahlen. (Leipzig, 1896.)

*) Ce Journal t. 40, p. 296.

En vertu du théorème d'*Hermite* la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ vérifie l'inégalité*)

$$\mathfrak{M}(a_{ij}) \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

donc elle est bornée dans l'ensemble (f) de toutes les formes quadratiques positives à coefficients réels.

M. M. *Korkine* et *Zolotareff* ont démontré**) que la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ possède plusieurs maxima dans l'ensemble (f) qui correspondent aux différentes classes des formes quadratiques positives équivalentes.

La limite $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$ indiquée par *Hermite* dans la lettre à *Jacobi* (lieu cité) n'est qu'une valeur maximum de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$.

Les formes quadratiques positives binaires et ternaires possèdent un seul maximum qui est donc, dans ce cas, la limite précise des valeurs de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$.

A partir du nombre de variables $n \geqq 4$, on rencontre plusieurs maxima de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$.

M. M. *Korkine* et *Zolotareff* ont trouvé plusieurs valeurs des différents maxima de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ qui surpassent la limite $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$ indiquée par *Hermite*, mais ne surpassent pas la limite 2.

La recherche de la limite précise du minimum des formes quadratiques positives de même déterminant se réduit, d'après M. M. *Korkine* et *Zolotareff*, à la recherche de toutes les classes différentes des formes quadratiques positives auxquelles correspondent les valeurs maxima de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$.

Le maximum maximorum des valeurs de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ est la plus grande valeur de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$, qui présente une fonction numérique $\mu(n)$.

M. M. *Korkine* et *Zolotareff* ont déterminé les valeurs suivantes de la fonction $\mu(n)$:

---

*) M. *Minkowski* a montré une limite supérieure de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$

$$\mathfrak{M}(a_{ij}) \leqq n$$

beaucoup plus simple que celle d'*Hermite*. (*Minkowski*. Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen. Ce Journal t. 107, p. 291.)

**) *Korkine* et *Zolotareff*. Sur les formes quadratiques. (Mathematische Annalen, t. VI, p. 366 et t. XI, p. 242.)

$$\mu(2) = \sqrt{\frac{4}{3}}, \quad \mu(3) = \sqrt[3]{2}, \quad \mu(4) = \sqrt[4]{4}, \quad \mu(5) = \sqrt[5]{8}.$$

Ils ont appelé extrêmes les formes quadratiques qui rendent à la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ une valeur maximum.*)

Les formes quadratiques extrêmes jouissent d'une propriété importante, à savoir:

I. *Chaque forme quadratique extrême est déterminée par la valeur de son minimum et par toutes les représentations de ce minimum.*

M. M. *Korkine* et *Zolotareff* ont déterminé toutes les classes des formes extrêmes à 2, 3, 4 et 5 variables.

En étudiant ces formes extrêmes, j'ai remarqué qu'elles sont toutes, bien définies par la propriété (I). Ce n'est qu'à partir des formes positives à six variables que j'ai rencontré des formes quadratiques positives qui jouissent de la propriété (I) et ne sont pas des formes extrêmes.

J'appelle „parfaite“ chaque forme quadratique positive qui jouit de la propriété (I).

Je démontre que l'ensemble de toutes les formes parfaites à n variables peut être partagé en des classes dont le nombre est fini.

Toute forme extrême étant, en vertu de la propriété (I), une forme parfaite, il en résulte que la fonction $\mu(n)$ présente le maximum des valeurs de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ qui correspondent aux différentes classes des formes parfaites.

J'ai établi un algorithme pour la recherche des différentes formes parfaites en introduisant une définition des formes parfaites contiguës.

A cet effet, je fais correspondre à l'ensemble (φ) de toutes les formes parfaites à n variables un ensemble (R) des domaines à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions déterminés à l'aide des inégalités linéaires.

L'ensemble (R) des domaines à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions présente une partition de l'ensemble (f) de toutes les formes quadratiques positives à n variables.

Chaque domaine R possède dans l'ensemble (R) un domaine contigu qui est bien déterminé par une face quelconque à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions du domaine $\mathfrak{R}$.

---

*) Voyez: *Minkowski:* Diskontinuitätsbereich für arithmet. Äquivalenz. (Ce Journal t. 129, § 10, p. 247.)

Je démontre que le domaine R correspondant à la forme parfaite $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ étant déterminé par les inégalités linéaires

$$\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

on aura σ formes parfaites définies par les égalités

$$(1.) \qquad \varphi_k(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho_k \psi_k(x_1, x_2, \dots x_n), \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

où

$$\psi_k(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma p_{ij}^{(k)} x_i x_j,$$

à condition que le paramètre positif ϱ_k $(k=1, 2, \dots \sigma)$ présente la plus petite valeur de la fonction

$$\frac{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) - M}{-\psi_k(x_1, x_2, \dots x_n)},$$

où $\psi_k(x_1, x_2, \dots x_n) < 0$ et M est minimum de la forme $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$.

J'appelle „contiguës à la forme parfaite $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$“ les formes parfaites (1.).

Chaque substitution à coefficients entiers et à déterminant ± 1 appartenant au groupe g des substitutions qui ne changent pas la forme φ ne fait que permuter les formes (1.). On peut, donc, partager les formes (1.) en des classes des formes équivalentes à l'aide des substitutions du groupe g. En choisissant une forme dans chaque classe, on aura un système des formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ qui peut remplacer le système (1.).

En procédant de cette manière, on peut obtenir un système complet des représentants des différentes classes des formes parfaites.

Les domaines correspondants formeront un système complet des représentants des différentes classes de l'ensemble (R).

J'ai remarqué qu'un système pareil

$$(2.) \qquad R, R_1, R_2, \dots R_{\tau-1}$$

des domaines de l'ensemble (R) peut servir à la réduction des formes quadratiques positives.

J'appelle réduite chaque forme quadratique positive appartenant à l'un des domaines (2.).

Il en résulte de cette définition:

I. *Chaque forme quadratique positive peut être transformée en une forme réduite équivalente, à l'aide d'une substitution qui présente un produit*

des substitutions appartenant à une série de substitutions

$$S_1, S_2, \ldots S_m$$

qui ne dépendent que du choix du système (2.).

II. *Deux formes réduites ne peuvent être équivalentes qu'à condition que la substitution correspondante appartienne à une série des substitutions dont le nombre est fini.*

Le côté faible de la méthode nouvelle de réduction des formes quadratiques positives, exposée dans ce Mémoire, consiste en ce que le nombre des substitutions qui transforment en soi-même les domaines de l'ensemble (R) ou leurs faces est, en général, très grand.

L'application de la théorie générale exposée dans ce Mémoire aux exemples numériques serait facilitée notamment si l'on savait résoudre le problème suivant:

Étant donné un groupe G des substitutions qui transforment en soi-même un domaine R, on demande de partager ce domaine en des parties équivalentes dont le nombre serait égal au nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ *substitutions du groupe G et à condition que le nombre des faces à* $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ *dimensions des domaines obtenus soit le plus petit possible.*

J'expose dans ce Mémoire la solution du problème énoncé dans deux cas: $n = 2$ et $n = 3$.

A partir du nombre des variables $n \geqq 4$, je ne connais aucune solution pratique du problème posé.

Première partie.

Théorie générale des formes quadratiques positives parfaites et des domaines qui leur correspondent.

Définition des formes quadratiques parfaites.

1. Soit

$$(1.) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

une forme quadratique positive quelconque. En désignant par

$$(2.) \qquad (l_{11}, l_{21}, \ldots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, \ldots l_{n2}), \ldots (l_{1s}, l_{2s}, \ldots l_{ns})$$

les différentes représentations du minimum M de la forme $\Sigma a_{ij} x_i x_j$, on aura les égalités

$$(3.) \qquad \Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} = M, \qquad (k = 1, 2, \ldots s).$$

On ne considérera pas dans la suite les deux systèmes

$$(l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}) \text{ et } (-l_{1k}, -l_{2k}, \ldots -l_{nk}), \qquad (k = 1, 2, \ldots s)$$

comme différents et on choisira arbitrairement l'un de ces systèmes.

En vertu de la supposition faite, on aura l'inégalité

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j > M$$

à condition qu'un système $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ des valeurs entières des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ n'appartienne pas à la série (2.), abstraction faite du système $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_n = 0$.

En envisageant les égalités (3.) comme les équations qui servent à déterminer $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients de la forme quadratique $\Sigma a_{ij} x_i x_j$, on n'aura que deux cas à examiner:

1.) il existe un nombre infini de solutions des équations (3.),

2.) les équations (3.) n'admettent qu'un seul système de solutions.

2. Examinons le premier cas.

Admettons qu'il existe un nombre infini de solutions des équations (3.). On trouvera dans ce cas un nombre infini des valeurs des paramètres

$$p_{ij} = p_{ji}, \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

vérifiant les équations

$$\Sigma p_{ij} l_{ik} l_{jk} = 0, \qquad (k=1,2,\dots s) \tag{4.}$$

les valeurs $p_{ij} = 0$, $i=1,2,\dots n$; $j=1,2,\dots n$ étant exclues.

En désignant

$$\psi(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma p_{ij} x_i x_j,$$

envisageons l'ensemble des formes quadratiques positives déterminées par l'égalité

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho\, \psi(x_1, x_2, \dots x_n), \tag{5.}$$

le paramètre ϱ étant arbitraire.

Pour qu'une forme quadratique déterminée par l'égalité (5.) soit positive, il faut et il suffit que la valeur correspondante du paramètre ϱ soit contenue dans un certain intervalle

$$-R' < \varrho < R.$$

Il peut arriver que $R = +\infty$, dans ce cas la limite inférieure $-R'$ sera finie. En remplaçant dans l'égalité (5.) la forme $\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$ par la forme $-\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$, ce qui est permis en vertu de (4.), on aura l'intervalle

$$-R < \varrho < R',$$

donc on peut supposer que la limite supérieure R est finie.

La forme quadratique correspondante, déterminée par l'égalité

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + R\, \psi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

ne sera pas positive, mais elle n'aura pas non plus de valeurs négatives; on en conclut qu'au moins pour un système $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ des valeurs réelles des variables $x_1, x_2, \dots x_n$ la forme $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ atteint à sa valeur la plus petite qui est nulle, et il s'en suit que le système $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ vérifie les équations

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} + R\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = 0. \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

En éliminant de ces équations $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, on obtient l'équation

$$D(R) = \begin{vmatrix} a_{11}+Rp_{11}, & a_{12}+Rp_{12}, \dots a_{1n}+Rp_{1n} \\ a_{21}+Rp_{21}, & a_{22}+Rp_{22}, \dots a_{2n}+Rp_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}+Rp_{n1}, & a_{n2}+Rp_{n2}, \dots a_{nn}+Rp_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

La plus petite racine positive de cette équation présente la valeur cherchée de R.

3. Examinons l'ensemble (f) des formes quadratiques positives déterminées par l'égalité (5.) à condition

$$(6.) \qquad 0 < \varrho < R.$$

Théorème. A l'ensemble (f) appartient une forme quadratique $\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ *qui est bien déterminée par les conditions suivantes:*

1. *toutes les représentations du minimum M de la forme* $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ *sont aussi des représentations du minimum M de la forme* $\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n)$,

2. *la forme* $\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ *possède en outre au moins une autre représentation du minimum M.*

Désignons par $M(\varrho)$ le minimum et par $D(\varrho)$ le déterminant de la forme quadratique $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ définie par l'égalité (5.) à condition (6.).

En vertu du théorème d'*Hermite*, on aura l'inégalité

$$(7.) \qquad M(\varrho) \leqq \mu(n) \sqrt[n]{D(\varrho)}.$$

Nous avons démontré que $D(R)=0$, il en résulte qu'une valeur du paramètre ϱ peut être choisie dans l'intervalle (6.) de manière que l'inégalité

$$\mu(n) \sqrt[n]{D(\varrho)} < M$$

ait lieu. On aura, à cause de (7.),

$$(8.) \qquad M(\varrho) < M.$$

Désignons par $(l_1, l_2, \dots l_n)$ une représentation du minimum $M(\varrho)$ de la forme $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ vérifiant l'inégalité (8.).

On aura

$$(9.) \qquad \varphi(l_1, l_2, \dots l_n) + \varrho\,\psi(l_1, l_2, \dots l_n) < M,$$

et il s'en suit que

$$(10.) \qquad \varphi(l_1, l_2, \dots l_n) > M \text{ et } \psi(l_1, l_2, \dots l_n) < 0.$$

Cela posé, cherchons la plus petite valeur de la fonction

$$(11.) \qquad \frac{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) - M}{-\psi(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

déterminée à condition

$$(12.) \qquad \psi(x_1, x_2, \dots x_n) \leqq 0.$$

A cet effet, examinons l'inégalité

$$\frac{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) - M}{-\psi(x_1, x_2, \dots x_n)} \leqq \frac{\varphi(l_1, l_2, \dots l_n) - M}{-\psi(l_1, l_2, \dots l_n)}.$$

En vertu de (9.), (10.) et (12.), on aura

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho\, \psi(x_1, x_2, \dots x_n) < M.$$

La forme quadratique $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho\, \psi(x_1, x_2, \dots x_n)$ étant positive, il n'existe qu'un nombre limité de valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$ vérifiant cette inégalité. Parmi ces systèmes se trouvent tous les systèmes qui rendent à la fonction (11.) la plus petite valeur déterminée à condition (12.).

Désignons par

$$(13.) \qquad (l_1', l_2', \dots l_n'), (l_1'', l_2'', \dots l_n''), \dots (l_1^{(r)}, l_2^{(r)}, \dots l_n^{(r)})$$

toutes les représentations du minimum positif ϱ_1 de la fonction (11.).

En posant

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho_1\, \psi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

on obtient la forme quadratique positive $\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ dont le minimum M est représenté par les systèmes (2.) et (13.), c'est ce qu'on démontrera sans peine.

4. A l'aide du procédé exposé précédemment, on déterminera une série des formes quadratiques positives

$$(14.) \qquad \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

qui jouissent de la propriété suivante: en désignant par s_k le nombre des représentations du minimum de la forme $\varphi_k (k = 1, 2, \dots)$, on aura les inégalités

$$(15.) \qquad s < s_1 < s_2 < \cdots$$

Une série semblable de formes quadratiques positives à n variables ne peut être prolongée indéfiniment, c'est ce qu'on démontrera à l'aide du lemme suivant.

Lemme. Le nombre de différentes représentations du minimum d'une forme quadratique positive à n variables ne surpasse pas $2^n - 1$.

Désignons par $(l_1, l_2, \dots l_n)$ et $(l'_1, l'_2, \dots l'_n)$ deux représentations quelconques du minimum M de la forme quadratique positive $\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

Admettons qu'en posant

$$l'_i = l_i + 2t_i, \qquad (i=1, 2, \dots n) \tag{16.}$$

les nombres $t_1, t_2, \dots t_n$ soient entiers.

Comme

$$\Sigma a_{ij} l'_i l'_j = M \quad \text{et} \quad \Sigma a_{ij} l_i l_j = M,$$

en vertu de (16.), il vient

$$\Sigma a_{ij} l_i t_j + \Sigma a_{ij} t_i t_j = 0.$$

On présentera cette égalité sous la forme

$$\Sigma a_{ij} (l_i + t_i)(l_j + t_j) + \Sigma a_{ij} t_i t_j = \Sigma a_{ij} l_i l_j. \tag{17.}$$

En observant que

$$\Sigma a_{ij} t_i t_j \geqq \Sigma a_{ij} l_i l_j,$$

on trouve, en vertu de (17.),

$$\Sigma a_{ij} (l_i + t_i)(l_j + t_j) \leqq 0,$$

donc il est nécessaire que

$$\Sigma a_{ij} (l_i + t_i)(l_j + t_j) = 0,$$

et par suite

$$l_i + t_i = 0. \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

A cause de (16.), on obtient

$$l'_i = -l_i. \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

Cela posé, partageons l'ensemble (X) de tous les systèmes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ des valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$ en 2^n classes, par rapport au module 2.

Nous avons démontré que deux représentations différentes du minimum M de la forme $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ n'appartiendront pas à la même classe; aucune représentation du minimum M n'appartiendra non plus à la classe composée des systèmes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ satisfaisant à la condition

$$x_i \equiv 0 \pmod 2, \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

donc le nombre des différentes représentations du minimum d'une forme quadratique positive ne peut être supérieur à $2^n - 1$.

5. Nous avons démontré que la série (14.) des formes quadratiques positives satisfaisant à la condition (15.) ne peut être prolongée indéfiniment, donc la série (14.) se terminera par une forme φ_k qui jouit de la propriété suivante: la forme φ_k est déterminée par les représentations de son minimum.

Définition. On appellera parfaite chaque forme quadratique positive qui est déterminée par les représentations de son minimum.

Supposons que la forme (1.) soit parfaite, on n'aura dans ce cas qu'un seul système de solutions des équations (3.).

En vertu de la supposition faite, les équations

$$\Sigma p_{ij} l_{ik} l_{jk} = 0 \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

n'admettent qu'un seul système de solutions

$$p_{ij} = p_{ji} = 0, \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n)$$

En effectuant la solution des équations (3.), on obtient les égalités

$$a_{ij} = \alpha_{ij} M, \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n)$$

où les coefficients α_{ij} sont rationnels.

Il en résulte que la forme parfaite $\frac{\varphi}{M}$ est à coefficients rationnels. On ne considérera pas dans la suite comme différentes les formes parfaites à coefficients proportionnels.

Propriétés fondamentales des formes quadratiques parfaites.

6. Soit

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

une forme quadratique parfaite. Supposons que toutes les représentations différentes du minimum de la forme parfaite φ composent la série

(1.) $\quad (l_{11}, l_{21}, \dots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, \dots l_{n2}),\ \dots\ (l_{1s}, l_{2s}, \dots l_{ns}).$

En choisissant n systèmes quelconques dans cette série, examinons le déterminant

$$(2.) \qquad \begin{vmatrix} l_{11}, l_{12}, \dots l_{1n} \\ l_{21}, l_{22}, \dots l_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ l_{n1}, l_{n2}, \dots l_{nn} \end{vmatrix} = \pm \omega.$$

Tous les déterminants que l'on peut former de cette manière ne peuvent s'annuler. En admettant le contraire, on aura s égalités de la forme

$$(3.) \qquad l_{ik} = \sum_{r=1}^{n-1} l_{ir} w_r^{(k)}, \qquad (i=1,2,\dots n;\ k=1,2,\dots s)$$

On choisira un système de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres $p_{ij} = p_{ji}$ vérifiant $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$\Sigma p_{ij} l_{ir} l_{jt} = 0, \qquad (r=1,2,\dots n-1;\ t=1,2,\dots n-1)$$

et en vertu de (3.), on aura

$$\Sigma p_{ij} l_{ik} l_{jk} = 0, \qquad (k=1,2,\dots s)$$

ce qui est impossible.

La valeur numérique ω du déterminant (2.) ne peut surpasser une limite fixe. Pour le démontrer, effectuons une transformation de la forme parfaite φ à l'aide d'une substitution

$$(4.) \qquad x_i = \sum_{r=1}^{n} l_{ir} x'_r; \qquad (i=1,2,\dots n)$$

on obtiendra une forme

$$\varphi'(x'_1, x'_2, \dots x'_n) = \Sigma a'_{ij} x'_i x'_j,$$

où

$$(5.) \qquad a'_{ii} = M. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

En désignant par D' le déterminant de la forme φ', on aura l'inégalité

$$a'_{11} a'_{22} \dots a'_{nn} \geqq D',$$

en vertu de la propriété connue des formes quadratiques positives.

Ayant égard à (5.), on obtient

$$(6.) \qquad M^n \geqq D'.$$

En désignant par D le déterminant de la forme φ, on aura, à cause de (2.) et (4.),

$$D' = D\omega^2,$$

donc l'inégalité (6.) se réduit à celle-ci:

$$D\omega^2 \leqq M^n.$$

En vertu du théorème d'*Hermite*, on a l'inégalité

$$M \leqq \mu(n) \sqrt[n]{D};$$

il s'en suit que

$$\omega \leqq [\mu(n)]^{\frac{n}{2}}. \quad (7.)$$ *)

7. Chaque forme parfaite sera transformée évidemment en une forme, parfaite aussi, à l'aide de toute substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant ± 1.

On en conclut qu'il existe un nombre infini des formes parfaites équivalentes.

L'ensemble (φ) de toutes les formes parfaites à n variables peut être partagé en des classes différentes à condition que chaque classe soit composée de toutes les formes parfaites équivalentes.

Théorème. Le nombre de classes différentes des formes parfaites à n variables est fini.

Désignons par

$$\lambda_k = l_{1k}x_1 + l_{2k}x_2 + \cdots + l_{nk}x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots s)$$

s formes linéaires

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s \quad (8.)$$

qui correspondent aux systèmes (1.) de représentations du minimum de la forme φ.

On établit de cette manière une correspondance uniforme entre une forme parfaite φ et le système (8.) de formes linéaires.

Supposons qu'on ait transformé la forme parfaite φ à l'aide d'une substitution S à coefficients entiers et à déterminant ± 1, on obtiendra une forme parfaite équivalente φ'. Désignons par

$$\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_s \quad (9.)$$

le système correspondant des formes linéaires.

---

*) Voyez le Mémoire de M. M. *Korkine* et *Zolotareff* sur les formes quadratiques positives. (Mathematische Annalen, t. XI, p. 256.)

On démontrera aisément que la substitution T, adjointe à la substitution S,*) transformera le système (8.) en un système (9.).

On en conclut qu'une certaine réduction des formes parfaites peut être effectuée à l'aide de la réduction des systèmes correspondants des formes linéaires.

La réduction du système (8.) se ramène, en vertu de (7.), à la réduction de n formes linéaires quelconques

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \tag{10.}$$

appartenant au système (8.) et à déterminant $\pm\omega$ qui ne s'annule pas.

On déterminera à l'aide de la méthode connue une substitution T qui transformera les formes linéaires (10.) à coefficients entiers en des formes linéaires

$$\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n \tag{11.}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} \lambda'_k = p_{k,k}x' + p_{k+1,k}x'_{k+1} + \cdots + p_{n,k}x'_n, & (k=1,2,\dots n) \\ p_{11}p_{22}\cdots p_{nn} = \omega \text{ et } p_{kk} > 0, & (k=1,2,\dots n) \\ 0 \leqq p_{k+i,k} < p_{kk}. & (i=1,2,\dots n-k;\ k=1,2,\dots n) \end{cases}$$

Les coefficients des formes (11.) étant entiers, il en résulte que ces coefficients ne surpassent pas des limites fixes.

La substitution T transformera le système (8.) en un système

$$\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_s \tag{12.}$$

de formes linéaires. En examinant successivement les déterminants des formes

$$(\lambda'_k, \lambda'_2, \dots \lambda'_n),\ (\lambda'_1, \lambda'_k, \dots \lambda'_n), \dots (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_k), \qquad (k=n+1,\ n+2 \dots s),$$

on démontrera que les valeurs numériques des coefficients de toutes les formes linéaires (12.) ne surpassent pas des limites fixes.

---

*) La substitution S étant définie par les égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}x'_k, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

on appelle „substitution adjointe à S“ la substitution T qui est déterminée par les égalités

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}x_k = x'_i. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Le nombre des systèmes pareils de formes linéaires à coefficients entiers étant limité, il en résulte que le nombre des classes différentes des formes parfaites est aussi limité.

Sur les domaines déterminés à l'aide des inégalités linéaires.

8. Nous avons vu au n° 7 que l'étude des formes parfaites peut être ramenée à l'étude de certains systèmes de formes linéaires.

On acquerra une nouvelle base à ces recherches en faisant correspondre à chaque forme quadratique parfaite à n variables un domaine à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions déterminé à l'aide des inégalités linéaires.

On abordera préalablement le problème général en étudiant les propriétés des domaines déterminés à l'aide des inégalités linéaires.*)

Envisageons un système des inégalités linéaires

$$p_{1k}x_1 + p_{2k}x_2 + \cdots + p_{mk}x_m \geqq 0, \qquad (k=1,2,\ldots\sigma)$$

à coefficients réels quelconques.

On appellera point (x) chaque système $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ des valeurs réelles des variables $x_1, x_2, \ldots x_m$ et on désignera

$$y_k(x) = p_{1k}x_1 + p_{2k}x_2 + \cdots + p_{mk}x_m. \qquad (k=1,2,\ldots\sigma)$$

On appellera „domaine" l'ensemble R des points vérifiant les inégalités

$$(1.) \qquad y_k(x) \geqq 0, \qquad (k=1,2,\ldots\sigma)$$

Supposons qu'au domaine R appartiennent des points vérifiant les inégalités

$$y_k(x) > 0, \qquad (k=1,2,\ldots\sigma)$$

on appellera de tels points intérieurs au domaine R, et le domaine R sera dit à m dimensions.

Il peut arriver que le domaine R ne possède pas des points intérieurs, on démontrera que dans ce cas tous les points appartenant au domaine R vérifient au moins une équation

$$y_h(x) = 0,$$

l'indice h ayant une valeur $1, 2, \ldots \sigma$.

*) Voyez: *Minkowski.* Geometrie der Zahlen, n° 19, p. 39.

Il est important d'avoir un criterium à l'aide duquel on pourrait reconnaître, si un domaine déterminé à l'aide des inégalités (1.) sera à m dimensions ou non.

Principe fondamental. Pour qu'un domaine déterminé à l'aide des inégalités (1.) *soit à m dimensions, il faut et il suffit que l'équation*

$$(\ast) \qquad \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k y_k(x) = 0$$

ne se réduise pas en une identité tant que les paramètres $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\sigma$ *sont positifs ou nuls, les valeurs* $\varrho_1 = 0,\ \varrho_2 = 0, \ldots \varrho_\sigma = 0$ *étant exclues.*

Le principe énoncé, considéré d'un certain point de vue, est évident, mais on ne parvient à la démonstration rigoureuse de ce principe qu'à l'aide de l'étude approfondie des domaines déterminés à l'aide des inégalités linéaires.

Pour plus de simplicité, on n'examinera dans ce qui suit que des domaines satisfaisant à la condition suivante: les équations

$$(2.) \qquad y_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots \sigma)$$

ne peuvent être vérifiées par aucun point, le point $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_m = 0$ étant exclu.

Il est aisé à démontrer que le cas général se ramènera toujours au cas examiné.

9. *Définition. On appellera arête du domaine R déterminé à l'aide des inégalités* (1.) *l'ensemble des points appartenant au domaine R et vérifiant les équations*

$$y_k(x) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots r \text{ où } r < \sigma)$$

à condition que ces équations définissent les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_m$ *à un facteur commun près.*

En désignant par $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ un point de l'arête considérée, on déterminera tous les points de l'arête à l'aide des égalités

$$x_i = \varrho\, \xi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

ϱ étant un paramètre positif arbitraire.

Il en résulte que chaque arête du domaine R est bien déterminée par chaque point y appartenant.

Supposons que le domaine R possède s arêtes caractérisées par les points

$$(\xi_k) = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots \xi_{mk}). \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

En posant

$$x_i = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k \xi_{ik}, \qquad (i=1, 2, \dots m) \tag{3.}$$

où

$$\varrho_k \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots s) \tag{4.}$$

on obtient un point (x) appartenant au domaine R, les paramètres positifs ou nuls $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_s$ étant arbitraires.

10. *Théorème fondamental. Supposons que les inégalités* (1.) *qui définissent le domaine R satisfassent à la condition* (⁂).

Le domaine R sera à m dimensions et chaque point y appartenant sera déterminé par les égalités (3.) *à condition* (4.).

Le théorème énoncé est bien connu dans le cas $m = 2$ et $m = 3$.

Nous allons démontrer qu'en supposant que le théorème soit vrai dans le cas de $m - 1$ variables, ce théorème sera encore vrai dans le cas de m variables.

Examinons préalablement les différentes inégalités du système (1.). Il peut arriver que plusieurs d'entr'elles puissent être mises sous la forme

$$y_h(x) = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k^{(h)} y_k(x) \quad \text{où} \quad \varrho_k^{(h)} \geqq 0, \qquad \left(k=1, 2, \dots s;\ \varrho_h^{(h)} = 0\right)$$

On appellera dépendantes de telles inégalités et on les exclura du système (1.).

Supposons que le système (1.) ne contienne que des inégalités indépendantes.

Leur nombre σ, en vertu de la supposition faite (2.), ne sera pas inférieur à m.

Cela posé, examinons un ensemble P_h des points appartenant au domaine R et vérifiant une équation

$$y_h(x) = 0, \tag{5.}$$

l'indice h ayant une valeur $1, 2, \dots \sigma$.

On appellera „face du domaine R“ le domaine P_h.

En vertu de la supposition faite, la face P_h sera à $m - 1$ dimensions.

Pour le démontrer, faisons correspondre à chaque point (x) vérifiant l'équation (5.) un point (u) à $m-1$ coordonnées $(u_1, u_2, \ldots u_{m-1})$ en posant

$$(6.) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} u_j. \qquad (i=1, 2, \ldots m)$$

Le système des inégalités (1.) sera transformé en un système

$$(7.) \qquad \eta_k(u) \geqq 0 \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma;\ k \neq h)$$

des inégalités à $m-1$ variables $u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$.

Admettons qu'on sache réduire l'équation

$$(8.) \qquad \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k \eta_k(u) = 0 \quad \text{où} \quad \varrho_h = 0 \quad \text{et} \quad \varrho_k \geqq 0 \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

en une identité. En vertu de (6.), on obtiendra l'identité

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k y_k(x) = \varrho\, y_h(x) \quad \text{où} \quad \varrho_h = 0.$$

On ne peut pas supposer que $\varrho > 0$, puisque autrement l'inégalité

$$y_h(x) \geqq 0$$

serait dépendante et en vertu de la supposition faite n'appartiendrait pas au système (1.).

En supposant que $\varrho \leqq 0$, on posera $\varrho_h = -\varrho$ et on obtiendra l'identité

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k y_k(x) = 0 \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Nous avons supposé que le théorème énoncé soit vrai dans le cas de $m-1$ variables. Comme l'équation (8.) ne peut être réduite en une identité, on en conclut que le système des inégalités (7.) définit un domaine $\mathfrak{P}_h$ à $m-1$ dimensions. De plus, en désignant par

$$(9.) \qquad (u_{11}, u_{21}, \ldots u_{m-1,1}),\ (u_{12}, u_{22}, \ldots u_{m-1,2}), \ldots (u_{1t}, u_{2t}, \ldots u_{m-1,t})$$

les points qui caractérisent t arêtes du domaine $\mathfrak{P}_h$, on déterminera chaque point (u) de ce domaine par les égalités

$$(10.) \qquad u_i = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k u_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \ldots t,\ i=1, 2, \ldots m-1)$$

On fera correspondre aux points (9.) les points

$$(\xi_r) = (\xi_{1r}, \xi_{2r}, \dots \xi_{mr}), \qquad (r=1, 2, \dots t) \tag{11.}$$

en les déterminant à l'aide des égalités (6.) et (9.).

Les points obtenus (11.) caractérisent t arêtes du domaine R appartenant à la face P_h. Chaque point (x) appartenant à la face P_h sera déterminé, en vertu de (6.) et (10.), par les égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k \xi_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots t;\ i=1, 2, \dots m) \tag{12.}$$

Observons que tous les points (11.) vérifient l'équation

$$y_h(x) = 0 \tag{13.}$$

et satisfont aux conditions

$$y_k(x) \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

On obtient donc les inégalités

$$y_h(\xi_r) = 0 \qquad (r=1, 2, \dots t) \tag{14.}$$

et les inégalités

$$y_k(\xi_r) \geqq 0. \qquad (r=1, 2, \dots t;\ k=1, 2, \dots \sigma)$$

La face P_h étant à $m-1$ dimensions, les égalités (14.) définissent les coefficients de l'équation (13.) à un facteur commun près.

11. Supposons qu'on ait déterminé de cette manière toutes les faces

$$P_1, P_2, \dots P_\sigma \tag{15.}$$

à $m-1$ dimensions du domaine R.

Supposons que les points

$$(\xi_k) = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots \xi_{mk}) \qquad (k=1, 2, \dots s) \tag{16.}$$

caractérisent les différentes arêtes du domaine R appartenant aux différentes faces (15.).

En désignant

$$x_i = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k \xi_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots s;\ i=1, 2, \dots m) \tag{17.}$$

on obtient un ensemble de points qui tous appartiennent au domaine R.

Je dis que chaque point (x) appartenant au domaine R peut être déterminé à l'aide des égalités (17.).

On peut supposer que le point (x) n'appartienne à aucune des faces (15.), puisque chaque point y appartenant peut être déterminé à l'aide des égalités (12.).

En supposant qu'on ait les inégalités

$$y_k(x) > 0, \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

choisissons arbitrairement un point (ξ_r) parmi ceux de la série (16.) et posons

$$x_i' = x_i - \varrho\, \xi_{ir} \quad \text{où} \quad \varrho > 0. \qquad (i=1, 2, \dots m) \tag{18.}$$

Tant que le paramètre ϱ est suffisamment petit, on aura aussi

$$y_k(x') > 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

En faisant croître le paramètre d'une manière continue, on déterminera à l'aide des égalités (18.) un point (x') vérifiant une équation

$$y_h(x') = 0$$

et satisfaisant aux conditions

$$y_k(x') \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Le point obtenu (x') appartient à la face P_h, donc on peut poser

$$x_i' = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k'\, \xi_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k' \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots t;\ i=1, 2, \dots m)$$

En vertu de (18.), il vient

$$x_i = \varrho\, \xi_{ir} + \sum_{k=1}^{t} \varrho_k'\, \xi_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho > 0,\ \varrho_k' \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots t;\ i=1, 2, \dots m)$$

Il reste à démontrer que le domaine R est à m dimensions.

Observons que tous les points déterminés par les égalités (17.) à condition

$$\varrho_k > 0 \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

sont intérieurs au domaine R.

En effet, tous les points (16.) vérifient les inégalités

$$y_h(\xi_h) \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots s;\ h=1, 2, \dots \sigma) \tag{19.}$$

En multipliant ces inégalités par ϱ_k, faisons la somme des inégalités obtenues; on aura, à cause de (17.),

$$y_h(x) = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k\, y_h(\xi_k) \geqq 0. \qquad (h=1, 2, \dots \sigma)$$

En vertu de (19.), on aura l'inégalité

$$y_h(x) > 0, \qquad (h=1,2,\dots s) \tag{20.}$$

tant que les nombres $y_h(\xi_1)$, $y_h(\xi_2)$, ... $y_h(\xi_s)$ ne s'annulent pas.

On ne peut pas admettre que les égalités

$$y_h(\xi_k) = 0 \qquad (k=1,2,\dots s)$$

aient lieu, puisque autrement toutes les équations

$$y_1(x)=0, \quad y_2(x)=0, \dots \quad y_\sigma(x)=0$$

seraient à coefficients proportionnels, ce qui est contre l'hypothèse; donc on aura les inégalités (20.), et il s'en suit que le domaine R est à m dimensions.

Nous avons démontré que la condition (⁂) est suffisante pour que le domaine R soit à m dimensions. Il est aisé à démontrer que cette condition est nécessaire.

12. Nous avons défini au n° 10 les faces à $m-1$ dimensions du domaine R. Cette définition peut être généralisée.

Définition. On appellera face à μ dimensions du domaine R ($\mu=1,2,\dots m-1$) un domaine $P(\mu)$ formé des points appartenant au domaine R et vérifiant un système d'équations

$$y_k(x) = 0, \qquad (k=1,2,\dots \tau) \tag{21.}$$

à condition que ces équations définissent un domaine à μ dimensions composé des points qui, tous, ne vérifient aucune autre équation $y_{\tau+1}(x)=0, \dots y_\sigma(x)=0$.

Choisissons parmi les points (16.) tous ceux qui vérifient les équations (21.).

En les désignant par

$$\xi_k = (\xi_{1k}, \xi_{2k} \dots \xi_{mk}), \qquad (k=1,2,\dots t)$$

on posera

$$x_i = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k \xi_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots t;\ i=1,2,\dots m) \tag{22.}$$

Il est aisé à démontrer que chaque point (x) appartenant à la face $P(\mu)$ peut être déterminé à l'aide des égalités (22.).

Corollaire. Chaque face du domaine R est un ensemble des points déterminés par les égalités (22.) *à condition que chaque point y appartenant ne puisse être déterminé par les égalités*

$$x_i = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k \xi_{ik} \quad où \quad \varrho_k \geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots s;\ i=1,2,\dots m)$$

à moins que tous les paramètres $\varrho_{t+1}, \varrho_{t+2}, \dots \varrho_s$ *ne s'annulent.*

13. Chaque point appartenant au domaine R ou est intérieur au domaine R ou est intérieur à une face de ce domaine.

Supposons que le point (x) soit intérieur à une face $P(\mu)$ du domaine R qui est formée de tous les points déterminés par les égalités (22.).

Je dis qu'on peut déterminer toujours le point (x) par les égalités (22.) à condition que

$$\varrho_k > 0. \qquad (k=1,2,\dots t)$$

Pour le démontrer, désignons

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{t} \xi_{ik}. \qquad (i=1,2,\dots m)$$

Le point (α) est intérieur à la face $P(\mu)$.

En posant

$$(23.) \qquad x_i' = x_i - \varrho\, \alpha_i \quad où \quad \varrho > 0, \qquad (i=1,2,\dots m)$$

on obtient un point (x_i') qui sera intérieur à la face $P(\mu)$ tant que le paramètre ϱ sera suffisamment petit; il s'en suit que

$$x_i' = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k' \xi_{ik} \quad où \quad \varrho_k' \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots t;\ i=1,2,\dots m)$$

En vertu de (23.), on obtient

$$x_i = \sum_{k=1}^{t} (\varrho + \varrho_k') \xi_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots m)$$

et en faisant

$$\varrho + \varrho_k' = \varrho_k, \qquad (k=1,2,\dots t)$$

on aura

$$x_i = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k \xi_{ik} \quad où \quad \varrho_k > 0. \qquad (k=1,2,\dots t;\ i=1,2,\dots m)$$

Observons qu'en faisant $\mu = m$ et $t = s$, on désignera par le symbole $P(m)$ le domaine R; on en conclut que chaque point (x) qui est intérieur au domaine R peut être déterminé par les égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k \xi_{ik} \quad où \quad \varrho_k > 0. \qquad (k=1\ 2,\dots s;\ i=1,2,\dots m)$$

Sur les domaines corrélatifs.

14. *Définition. Supposons qu'un domaine R soit déterminé à l'aide des inégalités*

$$p_{ik}x_1 + p_{2k}x_2 + \cdots + p_{mk}x_m \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

On appellera corrélatif au domaine R le domaine $\mathfrak{R}$ *qui est formé de tous les points* (x) *déterminés par les égalités*

$$(1.) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k p_{ik} \quad où \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma;\ i=1, 2, \ldots m)$$

Je dis que le domaine $\mathfrak{R}$ sera à m dimensions, si le domaine R ne possède pas de points vérifiant les équations

$$p_{1k}x_1 + p_{1k}x_2 + p_{mk}x_m = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

le point $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ x_m = 0$ étant exclu.

En effet, si tous les points du domaine $\mathfrak{R}$ vérifiaient une même équation

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_m x_m = 0,$$

on aurait les égalités

$$\xi_1 p_{1k} + \xi_2 p_{2k} + \cdots + \xi_m p_{mk} = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

en vertu de (1.), ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème. En supposant que le domaine R soit formé de tous les points (x) *déterminés par les égalités*

$$(2.) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k \xi_{ik} \quad où \quad \varrho_k \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \ldots s;\ i=1, 2, \ldots m)$$

on définira le domaine corrélatif $\mathfrak{R}$ *à l'aide des inégalités*

$$(3.) \qquad \xi_{1k}x_1 + \xi_{2k}x_2 + \cdots + \xi_{mk}x_m \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots s)$$

Désignons par $\mathfrak{R}'$ le domaine déterminé à l'aide des inégalités (3.). En vertu de la supposition faite, tous les points

$$(\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots \xi_{m1}),\ (\xi_{12}, \xi_{22}, \ldots \xi_{m2}),\ \ldots\ (\xi_{1s}, \xi_{2s}, \ldots \xi_{ms})$$

caractérisent les arêtes du domaine R, et on aura les inégalités

$$(4.) \qquad p_{1h}\xi_{1k} + p_{2h}\xi_{2k} + \cdots + p_{mh}\xi_{mk} \geqq 0; \qquad (h=1, 2, \ldots \sigma;\ k=1, 2, \ldots s).$$

Nous avons vu au n° 10 que chaque face P_h à $m-1$ dimensions du domaine R est caractérisée par les points

$$(\xi_{11}, \xi_{21}, \dots \xi_{m1}),\ (\xi_{12}, \xi_{22}, \dots \xi_{m2}),\ \dots\ (\xi_{1t}, \xi_{2t}, \dots \xi_{mt})$$

qui vérifient l'équation

$$(5.) \qquad y_h(x) = 0$$

de la face P_h. On obtient les égalités

$$p_{1h}\xi_{1k} + p_{2h}\xi_{2k} + \dots + p_{mh}\xi_{mk} = 0 \qquad (k=1, 2, \dots t)$$

qui définissent les coefficients $p_{1h}, p_{2h}, \dots p_{mh}$ de l'équation (5.) à un facteur commun près.

On en conclut, en vertu de la définition établie au n° 9, que le point $(p_{1h}, p_{2h}, \dots p_{mh})$ caractérise une arête du domaine $\mathfrak{R}'$.

En attribuant à l'indice h les valeurs $1, 2, \dots \sigma$, on obtient une série

$$(p_{11}, p_{21}, \dots p_{m1}),\ p_{12}, p_{22}, \dots p_{m2}),\ \dots\ (p_{1\sigma}, p_{2\sigma}, \dots p_{m\sigma})$$

de points qui caractérisent des arêtes différentes du domaine $\mathfrak{R}'$.

Je dis que le domaine $\mathfrak{R}'$ ne possède d'autres arêtes. Pour le démontrer, supposons qu'un point $(p_1, p_2, \dots p_m)$ caractérise une arête du domaine $\mathfrak{R}'$.

On aura les égalités

$$(6.) \qquad p_1\xi_{1h} + p_2\xi_{2h} + \dots + p_m\xi_{mh} = 0, \qquad (h=1, 2, \dots t)$$

qui définissent les coefficients $p_1, p_2, \dots p_m$ à un facteur commun près, et on aura les inégalités

$$(7.) \qquad p_1\xi_{1k} + p_2\xi_{2k} + \dots p_m\xi_{mk} \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

Soit (x) un point quelconque du domaine R. On déterminera le point (x) à l'aide des égalités (2.). En multipliant les inégalités (7.) par ϱ_k et en faisant la somme des inégalités obtenues, on aura, à cause de (2.),

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m \geqq 0.$$

On en conclut que les inégalités

$$-p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_m x_m \geqq 0 \quad \text{et} \quad p_{1k}x_1 + p_{2k}x_2 + \dots + p_{mk}x_m \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

définissent un domaine qui n'est pas à m dimensions.

En vertu du théorème fondamental du n° 10, on déterminera dans ce cas des valeurs positives ou nulles des paramètres $\varrho, \varrho_1, \dots \varrho_\sigma$ qui réduisent l'équation

$$-\varrho(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m) + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (p_{1k} x_1 + p_{2k} x_2 + \cdots + p_{mk} x_m) = 0$$

en une identité.

Il s'en suit que

$$p_i = \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{\varrho_k}{\varrho} p_{ik} \quad \text{où} \quad \frac{\varrho_k}{\varrho} \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots\sigma;\ i=1,2,\dots m)$$

En substituant les expressions obtenues de $p_1, p_2, \dots p_m$ dans les égalités (6.), on aura

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \frac{\varrho_k}{\varrho} (\xi_{1h} p_{1k} + \xi_{2h} p_{2k} + \cdots \xi_{mh} p_{mk}) = 0. \qquad (h=1,2,\dots t)$$

En vertu de (4.), on trouve

$$\frac{\varrho_k}{\varrho} (\xi_{1h} p_{1k} + \xi_{2h} p_{2k} + \cdots + \xi_{mh} p_{mk}) = 0. \quad (h=1,2,\dots t;\ k=1,2,\dots\sigma)$$

Supposons que $\frac{\varrho_k}{\varrho} > 0$, il viendra

$$\xi_{1h} p_{1k} + \xi_{2h} p_{2k} + \cdots + \xi_{mh} p_{mk} = 0, \qquad (h=1,2,\dots t)$$

donc les coefficients $p_1, p_2, \dots p_m$, en vertu de (6.), sont proportionnels aux coefficients $p_{1k}, p_{2k} \dots p_{mk}$; il s'en suit que les points $(p_{1k}, p_{2k} \dots p_{mk})$ et $(p_1, p_2, \dots p_m)$ caractérisent la même arête du domaine $\mathfrak{R}'$.

En vertu du théorème fondamental du n° 10, tous les points du domaine $\mathfrak{R}'$ seront déterminés par les égalités (1.), il en résulte que les domaines $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ coïncident.

Corollaire. Supposons qu'une face $P(\mu)$ à μ dimensions du domaine R soit déterminée par les équations

$$p_{1k} x_1 + p_{2k} x_2 + \cdots + p_{mk} x_m = 0, \qquad (k=1,2,\dots\tau)$$

et que chaque point (x) appartenant à la face $P(\mu)$ soit déterminé par les égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k \xi_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots t;\ i=1,2,\dots m)$$

Le domaine corrélatif $\mathfrak{R}$ possédera une face correspondante $\mathfrak{P}(m-\mu)$ à $m-\mu$ dimensions déterminée par les équations

$$\xi_{1k}x_1+\xi_{2k}x_2+\cdots+\xi_{mk}x_m=0, \qquad (k=1,2,\ldots t)$$

et chaque point (x) *appartenant à la face* $\mathfrak{P}(m-\mu)$ *sera déterminé par les égalités*

$$x_i=\sum_{k=1}^{\tau}\varrho_k p_{ik} \quad où \quad \varrho_k\geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots\tau;\ i=1,2,\ldots m)$$

Définition des domaines de formes quadratiques correspondant aux différentes formes parfaites.

15. Considérons une forme quadratique parfaite quelconque φ.

Supposons que toutes les représentations du minimum de la forme φ composent la série

(1.) $$(l_{11},l_{21},\ldots l_{n1}),\ (l_{12},l_{22},\ldots l_{n2}),\ldots(l_{1s},l_{2s},\ldots l_{ns}).$$

En désignant

(2.) $$\lambda_k=l_{1k}x_1+l_{2k}x_2+\cdots+l_{nk}x_n, \qquad (k=1,2,\ldots s)$$

on fait correspondre à la série (1.) une série de formes linéaires

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_s.$$

Envisageons un domaine R de formes quadratiques déterminées par l'égalité

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\sum_{k=1}^{s}\varrho_k\lambda_k^2$$

à condition que

$$\varrho_k\geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots s)$$

On dira que le domaine R correspond à la forme parfaite φ.

Observons que le domaine R est à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions.

En admettant le contraire supposons que toutes les formes quadratiques appartenant au domaine R vérifient une équation linéaire

$$\psi(f)=\Sigma p_{ij}a_{ij}=0.$$

En vertu de la définition établie, on aura les égalités

$$\psi(\lambda_k^2)=0 \qquad (k=1,2,\ldots s)$$

ou, ce qui revient au même, à cause de (2.),

$$\Sigma p_{ij} l_{ik} l_{jk} = 0, \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

ce qui est impossible, la forme φ étant parfaite.

En vertu de ce qui a été dit aux nn° 9—14, le domaine R possède s arêtes caractérisées par les formes quadratiques

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots \lambda_s^2. \tag{3.}$$

Supposons qu'on ait déterminé toutes les faces

$$P_1, P_2, \dots P_\sigma$$

à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions du domaine R.

Chaque face P_k peut être déterminée de deux manières:

1. Toutes les formes quadratiques appartenant à la face P_k vérifient une équation

$$\psi_k(f) = \Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} = 0 \tag{4.}$$

qui peut être déterminée de manière que l'inégalité

$$\psi_k(f) > 0$$

ait lieu tant que la forme f appartenant au domaine R est extérieure à la face P_k.

2. En choisissant parmi les formes quadratiques (3.) celles

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots \lambda_t^2$$

qui vérifient l'équation (4.), on déterminera toutes les formes quadratiques appartenant à la face P_k par les égalités

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k \lambda_k^2,$$

où

$$\varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots t)$$

En vertu du théorème du n° 14, le domaine R peut être considéré comme un ensemble de points vérifiant les inégalités

$$\psi_k(f) \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Sur les formes quadratiques extrêmes.

16. Désignons par $M(a_{ij})$ le minimum et par $D(a_{ij})$ le déterminant d'une forme quadratique positive $\Sigma a_{ij} x_i x_j$. La forme quadratique positive $\frac{1}{\sqrt[n]{D(a_{ij})}} \Sigma a_{ij} x_i x_j$ sera à déterminant 1 et possédera le minimum

$$\frac{M(a_{ij})}{\sqrt[n]{D(a_{ij})}} = \mathfrak{M}(a_{ij}).$$

Examinons différentes valeurs de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ qui est bien déterminée dans l'ensemble (f) de toutes les formes quadratiques positives à n variables.

Définition. On appellera extrême) une forme quadratique positive* $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ *qui jouit de la propriété que la valeur correspondante de la fonction* $\mathfrak{M}(a_{ij})$ *est maximum.*

Observons que la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ ne change pas sa valeur quand on remplace une forme quadratique $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ par une forme à coefficients proportionnels.

En attribuant aux coefficients de la forme extrême $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ des variations

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \qquad (i=1, 2, \ldots n;\ j=1, 2, \ldots n)$$

satisfaisant à la condition

$$(1.) \qquad |\varepsilon_{ij}| < \varepsilon, \qquad (i=1, 2, \ldots n;\ j=1, 2, \ldots n)$$

ε étant un paramètre positif arbitraire, examinons la valeur correspondante de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$.

En vertu de la définition établie, on peut déterminer le paramètre ε de manière que l'inégalité

$$(2.) \qquad \mathfrak{M}(a_{ij} + \varepsilon_{ij}) < \mathfrak{M}(a_{ij})$$

ait lieu à condition (1.) et tant que les coefficients ε_{ij} ne sont pas proportionnels aux coefficients

$$a_{ij}. \qquad (i=1, 2, \ldots n;\ j=1, 2, \ldots n)$$

---

*) Voyez le Mémoire de M. M. *Korkine* et *Zolotareff*, Sur les formes quadratiques, Mathematische Annalen t. VI, p. 368.)

17. *Théorème. Pour qu'une forme quadratique* $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ *soit extrême, il faut et il suffit qu'elle soit parfaite et que sa forme adjointe* $\Sigma \frac{\partial D(a_{ij})}{\partial a_{ij}} x_i x_j$ *soit intérieure au domaine correspondant à la forme* $\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

Désignons par

$$(3.) \qquad (l_{11}, l_{21}, \dots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, \dots l_{n2}), \dots (l_{1s}, l_{2s}, \dots l_{ns})$$

les représentations différentes du minimum $M(a_{ij})$ de la forme $\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

Considérons une forme quadratique $\Sigma (a_{ij} + \varrho \varepsilon_{ij}) x_i x_j$, le paramètre ϱ étant arbitraire. On peut déterminer un intervalle

$$(4.) \qquad -\delta < \varrho < \delta \text{ où } 0 < \delta < 1$$

de manière que toutes les représentations du minimum de la forme $\Sigma (a_{ij} + \varrho \varepsilon_{ij}) x_i x_j$ se trouvent parmi les systèmes (3.) tant que les variations ε_{ij} satisfont à la condition (1.).

En désignant par

$$(5.) \qquad M' = \Sigma (a_{ij} + \varrho \varepsilon_{ij}) l_{ik} l_{jk} \text{ et } M = \Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk}$$

les minima des formes $\Sigma (a_{ij} + \varrho \varepsilon_{ij}) x_i x_j$ et $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ et par D' et D leurs déterminants, on aura

$$\mathfrak{M}(a_{ij} + \varrho \varepsilon_{ij}) = \frac{\Sigma (a_{ij} + \varrho \varepsilon_{ij}) l_{ik} l_{jk}}{\sqrt[n]{D'}}, \qquad \mathfrak{M}(a_{ij}) = \frac{\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk}}{\sqrt[n]{D}}.$$

En vertu de (2.), on obtient l'inégalité

$$\frac{\Sigma (a_{ij} + \varrho \varepsilon_{ij}) l_{ik} l_{jk}}{\sqrt[n]{D'}} < \frac{\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk}}{\sqrt[n]{D}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6.) \qquad \varrho \Sigma \varepsilon_{ij} l_{ik} l_{jk} < M\left(\sqrt[n]{\frac{D'}{D}} - 1\right).$$

Cela posé, admettons que la forme $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ ne soit pas parfaite.

On déterminera dans ce cas les variations ε_{ij} de manière que les égalités

$$\Sigma \varepsilon_{ij} l_{ik} l_{jk} = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots s)$$

aient lieu. En vertu de (6.), on obtiendra l'inégalité

$$D' > D.$$

En développant le déterminant D' en une série, on aura l'inégalité

$$(7.) \qquad \varrho \Sigma \varepsilon_{ij} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} + \frac{\varrho^2}{2} \Sigma \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ij} \partial a_{kh}} + \cdots > 0.$$

Le paramètre ϱ étant arbitraire satisfaisant à la condition (4.), il est nécessaire que

$$\Sigma \varepsilon_{ij} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = 0.$$

M. M. *Korkine* et *Zolotareff* ont démontré*) que dans ce cas on aura toujours l'inégalité

$$\Sigma \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ij} \partial a_{kh}} < 0,$$

donc l'inégalité (7.) est impossible.

18. Nous avons démontré que la forme $\varphi = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ doit être parfaite

Supposons que le domaine R correspondant à la forme parfaite φ soit déterminé par σ inégalités

$$\psi_r (f) = \Sigma p_{ij}^{(r)} a_{ij} \geqq 0. \qquad (r = 1, 2, \ldots \sigma)$$

En vertu de ces inégalités, on aura

$$(8.) \qquad \psi_r (\lambda_k^2) = \Sigma p_{ij}^{(r)} l_{ik} l_{jk} \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots s;\ r = 1, 2, \ldots \sigma)$$

Posons

$$\varepsilon_{ij} = t p_{ij}^{(r)} \text{ où } t > 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ j = 1, 2, \ldots n)$$

En vertu de (6.), on aura

$$(9.) \qquad \varrho t \Sigma p_{ij}^{(r)} l_{ik} l_{jk} < M \left(\sqrt[n]{\frac{D'}{D}} - 1 \right).$$

Attribuons au paramètre ϱ une valeur positive satisfaisant à la condition (4.); en vertu de (8.) et (9.) il viendra

$$D' > D.$$

En développant le déterminant D' en une série, on obtient l'inégalité

$$\varrho t \Sigma p_{ij}^{(r)} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} + \frac{(\varrho t)^2}{2} \Sigma p_{ij}^{(r)} p_{kh}^{(r)} \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ij} \partial a_{kh}} + \cdots > 0.$$

*) Mathematische Annalen, t. XI, p. 250.

Le paramètre positif ϱ étant aussi petit que l'on voudra, il s'en suit que

$$\Sigma p_{ij}^{(r)} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} > 0. \qquad (r=1, 2, \dots \sigma)$$

Il est donc démontré que la forme $\Sigma \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} x_i x_j$, adjointe à la forme φ, est intérieure au domaine R.

Je dis que dans ce cas la forme parfaite φ sera extrême.

En admettant le contraire, supposons que l'inégalité

$$\mathfrak{M}(a_{ij}+\varepsilon_{ij}) \geqq \mathfrak{M}(a_{ij}) \qquad (10.)$$

soit vérifiée par un système quelconque de variations ε_{ij} ($i=1, 2, \dots n$; $j=1, 2, \dots n$) satisfaisant à la condition (1.) quelque petit que soit le paramètre ε.

En vertu de (10.), on obtient

$$\Sigma \varepsilon_{ij} l_{ik} l_{jk} \geqq M\left(\sqrt[n]{\frac{D'}{D}} - 1\right); \qquad (k=1, 2, \dots s) \qquad (11.)$$

l'inégalité obtenue doit avoir lieu quelle que soit la valeur de l'indice $k=1, 2, \dots s$.

En désignant

$$\eta_{ij} = a_{ij}\left(\sqrt[n]{\frac{D}{D'}} - 1\right) + \varepsilon_{ij}\sqrt[n]{\frac{D}{D'}}, \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n) \qquad (12.)$$

examinons la forme quadratique

$$\varphi_0(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma(a_{ij}+\eta_{ij}) x_i x_j. \qquad (13.)$$

En vertu de (12.) la forme φ_0 est à déterminant D.

En choisissant le paramètre ε suffisamment petit, on peut supposer que

$$|\eta_{ij}| < \eta, \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n) \qquad (14.)$$

η étant un paramètre positif si petit que l'on voudra.

En vertu de (5.), (11.) et (12.), on obtient

$$\Sigma \eta_{ij} l_{ik} l_{jk} \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots s) \qquad (15.)$$

En développant le déterminant D de la forme (13.) en série, on trouvera

$$D + \Sigma \eta_{ij} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} + R_2 = D. \qquad (16.)$$

Dans cette égalité le reste R_2 vérifie une inégalité

$$|R_2| < \eta^2 P,$$

P étant un nombre positif ne dépendant pas du paramètre η tant que $\eta < 1$.

En vertu de (16.), on obtient

$$\left|\Sigma \eta_{ij} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}}\right| < \eta^2 P. \tag{17.}$$

Nous avons supposé que la forme quadratique $\Sigma \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} x_i x_j$, adjointe à la forme φ, soit intérieure au domaine R. En vertu de ce qui a été dit au n° 13, on déterminera la forme $\Sigma \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} x_i x_j$ à l'aide de l'égalité

$$\Sigma \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} x_i x_j = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k \lambda_k^2 \tag{18.}$$

où

$$\varrho_k > 0. \qquad (k=1, 2, \dots s) \tag{19.}$$

L'égalité (18.) peut être remplacée par les suivantes:

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k l_{ik} l_{jk}. \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n)$$

En multipliant ces égalités par η_{ij} et en additionnant les égalités obtenues, on aura

$$\Sigma \eta_{ij} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = \sum_{k=1}^{s} \varrho_k \Sigma \eta_{ij} l_{ik} l_{jk}. \tag{20.}$$

En vertu de (15.), (17.) et (19.), on obtient les inégalités

$$0 \leqq \Sigma \eta_{ij} l_{ik} l_{jk} < \eta^2 \frac{P}{\varrho_k}; \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

donc on peut poser

$$\Sigma \eta_{ij} l_{ik} l_{jk} = \tau_k \eta^2, \qquad (k=1, 2, \dots s) \tag{21.}$$

et les nombres positifs ou nuls τ_k $(k=1, 2, \dots s)$ ne surpasseront pas des limites fixes qui ne dépendent pas du paramètre η.

D'après la définition des formes parfaites, les équations (21.) n'admettent qu'un seul système de solutions. En effectuant cette solution des équations (21.), on obtient

$$\eta_{ij} = \tau_{ij} \eta^2 \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n)$$

où

$$|\tau_{ij}| < T, \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

T étant un nombre positif qui ne dépend pas du paramètre η; on aura donc les inégalités

$$|\eta_{ij}| < \eta^2 T. \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n) \tag{22.}$$

Cela posé, prenons une fraction quelconque positive ϑ et posons

$$\eta = \frac{\vartheta}{T}.$$

En vertu de (14.), on aura

$$|\eta_{ij}| < \frac{\vartheta}{T}, \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

et à cause de (22.), il viendra

$$|\eta_{ij}| < \frac{\vartheta^2}{T}. \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

En posant

$$\eta = \frac{\vartheta^2}{T},$$

on aura, à cause de (22.),

$$|\eta_{ij}| < \frac{\vartheta^4}{T}, \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

et ainsi de suite.

On obtiendra de cette manière les inégalités

$$|\eta_{ij}| < \frac{\vartheta^{2^k}}{T} \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n;\ k=0,1,2,\dots)$$

il s'en suit que

$$\eta_{ij} = 0. \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

En vertu de (12.), on obtient

$$\varepsilon_{ij} = a_{ij}\left(\sqrt[n]{\frac{D'}{D}} - 1\right); \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

donc les coefficients ε_{ij} sont proportionnels aux coefficients a_{ij} $(i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$, ce qui est contre l'hypothèse.

Propriétés de l'ensemble des domaines correspondant aux différentes formes parfaites à n variables.

19. Chaque forme parfaite φ sera transformée en une forme parfaite équivalente φ' à l'aide de toute substitution S à coefficients entiers et à déterminant ± 1.

Désignons par R et R' les domaines correspondant aux formes parfaites φ et φ' et par T la substitution adjointe à la substitution S.

On démontrera aisément que le domaine R sera transformé en un domaine équivalent R' à l'aide de la substitution T.

On en conclut qu'il existe un nombre infini de domaines équivalents au domaine R.

Désignons par (R) l'ensemble de tous les domaines correspondant aux différentes formes parfaites à n variables.

L'ensemble (R) peut être partagé en des classes de domaines équivalents.

En vertu de ce qui a été dit précédemment, le nombre des classes différentes de l'ensemble (R) est égal au nombre des classes de formes parfaites à n variables.

20. *Théorème. Supposons qu'une forme quadratique f soit intérieure à une face $P(\mu)$ à μ dimensions du domaine $R\left(\mu = 1, 2, \ldots \frac{n(n+1)}{2}\right)$.*

La forme f n'appartiendra qu'aux domaines de l'ensemble (R) qui sont contigus par la face $P(\mu)$.

Supposons que le domaine R soit caractérisé par les formes quadratiques

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots \lambda_s^2 \tag{1.}$$

et que la face $P(\mu)$ à μ dimensions du domaine R soit caractérisée par les formes quadratiques

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots \lambda_t^2. \tag{2.}$$

Dans le cas $\mu = \frac{n(n+1)}{2}$, on posera $t = s$, et le symbole $P\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ désignera le domaine R.

La forme quadratique f étant intérieure à la face $P(\mu)$, on aura l'égalité

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k \lambda_k^2 \quad \text{où} \quad \varrho_k > 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots t) \tag{3.}$$

Admettons que la même forme f appartienne à un autre domaine R' de l'ensemble (R).

Supposons que le domaine R' soit caractérisé par les formes quadratiques

$$\lambda_1'^2, \lambda_2'^2, \ldots \lambda_\sigma'^2 \tag{4.}$$

et que la forme f soit intérieure à la face $P'(\nu)$ du domaine R' caractérisée par les formes quadratiques

$$(5.) \qquad \lambda_1'^2, \lambda_2'^2, \dots \lambda_\tau'^2.$$

On aura, en vertu de la supposition faite,

$$(6.) \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{h=1}^{\tau} \varrho_h' \lambda_h'^2 \quad \text{où} \quad \varrho_h' > 0. \qquad (h=1, 2, \dots \tau)$$

Cela posé, désignons par φ et φ' les formes parfaites correspondant aux domaines R et R' et supposons, pour plus de simplicité, que le minimum des formes φ et φ' soit M.

En désignant par le symbole (f, f') le résultant

$$(f, f') = \Sigma a_{ij} a_{ij}',$$

de deux formes quadratiques

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{ij} x_i x_j \quad \text{et} \quad f'(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{ij}' x_i x_j,$$

examinons deux résultants (f, φ) et (f, φ').

En vertu de (3.), on obtient

$$(7.) \qquad (f, \varphi) = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k (\varphi, \lambda_k^2) \quad \text{et} \quad (f, \varphi') = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k (\varphi', \lambda_k^2).$$

En vertu de (6.), on obtient

$$(8.) \qquad (f, \varphi) = \sum_{h=1}^{\tau} \varrho_h' (\varphi, \lambda_h'^2) \quad \text{et} \quad (f, \varphi') = \sum_{h=1}^{\tau} \varrho_h' (\varphi', \lambda_h'^2).$$

Observons que

$$(9.) \qquad (\varphi, \lambda_k^2) = M \quad \text{et} \quad (\varphi', \lambda_k^2) \geqq M; \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

$$(10.) \qquad (\varphi, \lambda_h'^2) \geqq M \quad \text{et} \quad (\varphi', \lambda_h'^2) = M. \qquad (h=1, 2, \dots \sigma)$$

Des égalités (7.), on tire

$$(11.) \qquad (f, \varphi') - (f, \varphi) = \sum_{k=1}^{t} \varrho_k [(\varphi', \lambda_k^2) - (\varphi, \lambda_k^2)],$$

et en vertu de (3.) et (9.), il vient

$$(f, \varphi') - (f, \varphi) \geqq 0.$$

Des égalités (8.), on tire

$$(12.) \qquad (f, \varphi') - (f, \varphi) = \sum_{h=1}^{\tau} \varrho'_h [(\varphi', \lambda_h'^2) - (\varphi, \lambda_h'^2)],$$

et en vertu de (6.) et (10.), on aura

$$(f, \varphi') - (f, \varphi) \leqq 0.$$

Il s'en suit que

$$(f, \varphi') = (f, \varphi),$$

et les égalités (11.) et (12.) donnent

$$(\varphi', \lambda_k^2) = (\varphi, \lambda_k^2), \qquad (k=1, 2, \dots t)$$

$$(\varphi', \lambda_h'^2) = (\varphi, \lambda_h'^2). \qquad (h=1, 2, \dots \tau)$$

En vertu de (9.) et (10.), il vient

$$(13.) \qquad (\varphi, \lambda_h'^2) = M, \qquad (h=1, 2, \dots \tau)$$

$$(14.) \qquad (\varphi', \lambda_k^2) = M. \qquad (k=1, 2, \dots t)$$

En vertu des égalités (13.), les formes quadratiques (5.) se trouvent parmi celles de la série (1.). En vertu de (14.), les formes quadratiques (2.) se trouvent parmi celles de la série (4.).

Je dis que dans ce cas les séries (2.) et (5.) contiennent les mêmes formes.

Pour le démontrer, supposons que toutes les formes appartenant à la face $P(\mu)$ vérifient les équations

$$\psi_1(f) = 0, \quad \psi_2(f) = 0, \dots \quad \psi_r(f) = 0$$

et que chaque forme appartenant au domaine R vérifie les inégalités

$$(15.) \qquad \psi_1(f) \geqq 0, \quad \psi_2(f) \geqq 0, \dots \quad \psi_r(f) \geqq 0.$$

En vertu de (6.), on aura

$$\varrho'_1 \psi_i(\lambda_1'^2) + \varrho'_2 \psi_i(\lambda_2'^2) + \cdots + \varrho'_\tau \psi_i(\lambda_\tau'^2) = 0, \qquad (i=1, 2, \dots r)$$

et à cause de (15.), on trouve

$$\psi_i(\lambda_h'^2) = 0; \qquad (i=1, 2, \dots r; \quad h=1, 2, \dots \tau)$$

donc toutes les formes de la série (5.) appartiennent à la série (2.).

De la même manière, on démontrera que toutes les formes de la série (2.) appartiennent à la série (5.).

On en conclut que les faces $P(\mu)$ et $P'(\nu)$ coïncident, donc les domaines R et R' sont contigus par la face $P(\mu)$.

Corollaire. Une forme quadratique qui est intérieure à un domaine de l'ensemble (R) ne peut appartenir à aucun autre domaine de cet ensemble.

21. *Théorème. Supposons qu'à une face $P(\mu)$ du domaine R appartiennent des formes quadratiques positives. Dans ce cas, le nombre des domaines de l'ensemble (R) contigus par la face $P(\mu)$ est fini.*

Désignons par

$$R, R_1, R_2, \ldots$$

les domaines de l'ensemble (R) contigus par la face $P(\mu)$. Soient

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$$

les formes parfaites correspondantes ayant le minimum M.

En vertu de la supposition faite, une forme quadratique positive f sera intérieure à la face $P(\mu)$.

Nous avons démontré au n° précédent que

$$(f, \varphi) = (f, \varphi_1) = (f, \varphi_2) = \cdots \tag{16.}$$

Il est aisé à démontrer que le nombre des formes parfaites ayant le minimum M et vérifiant les égalités (16.) est fini.

Algorithme pour la recherche du domaine de l'ensemble (R) contigu à un autre domaine par une face à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions.

22. Soit

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

une forme parfaite ayant le minimum M dont les représentations différentes composent une série

$$(l_{11}, l_{21}, \ldots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, \ldots l_{n2}), \ldots\ (l_{1s}, l_{2s}, \ldots l_{ns}). \tag{1.}$$

Supposons qu'une face P du domaine R correspondant à la forme parfaite φ soit déterminée par l'équation

$$\psi(f) = \Sigma p_{ij} a_{ij} = 0$$

et par la condition

$$\psi(f) \geqq 0$$

qui est vérifiée par chaque forme quadratique appartenant au domaine R.

Supposons que la face P soit caractérisée par les formes quadratiques

(2.) $$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots \lambda_t^2$$

où

$$\lambda_k = l_{1k} x_1 + l_{2k} x_2 + \cdots + l_{nk} x_n. \qquad (k=1, 2, \dots s)$$

En vertu de la supposition faite, on aura les égalités

(3.) $$\Sigma p_{ij} l_{ik} l_{jk} = 0 \qquad (k=1, 2, \dots t)$$

qui définissent les coefficients p_{ij} $(i = 1, 2, \dots n;\ j = 1, 2, \dots n)$ à un facteur commun près.

Admettons que la face P puisse appartenir aux autres domaines de l'ensemble (R). Désignons par R' un domaine pareil. Soit φ' la forme parfaite correspondant au domaine R'.

En vertu de la supposition faite, les formes quadratiques (2.) appartiennent aux domaines R et R'. Il en résulte que les systèmes

(4.) $$(l_{11}, l_{21}, \dots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, l_{n2}), \dots\ (l_{1t}, l_{2t}, \dots l_{nt})$$

correspondant aux formes (2.) représentent le minimum des formes φ et φ'.

Supposons, pour plus de simplicité, que les formes φ et φ' aient le même minimum M. On aura les égalités

(5.) $$\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} = M \text{ et } \Sigma a'_{ij} l_{ik} l_{jk} = M, \qquad (k=1, 2, \dots t)$$

en posant

$$\varphi'(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a'_{ij} x_i x_j.$$

Des égalités (5.), on tire

$$\Sigma (a'_{ij} - a_{ij}) l_{ik} l_{jk} = 0, \qquad (k=1, 2, \dots t)$$

et en vertu de (3.), il vient

(6.) $$a'_{ij} = a_{ij} + \varrho p_{ij}. \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n)$$

Désignons

$$\psi(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma p_{ij} x_i x_j.$$

En vertu de (6.), on obtient

$$(7.) \qquad \varphi'(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho\,\psi(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Cela posé, choisissons dans la série (1.) un système $(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh})$ qui n'appartient pas à la série (4.). Comme

$$\varphi(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh}) = M, \quad \varphi'(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh}) \geqq M$$

et

$$\psi(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh}) > 0,$$

on déduit de l'égalité

$$\varphi'(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh}) = \varphi(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh}) + \varrho\,\psi(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh})$$

l'inégalité

$$\varrho \geqq 0.$$

La supposition $\varrho = 0$ étant évidemment impossible, on obtient

$$\varrho > 0,$$

et il s'en suit que

$$\varphi'(l_{1h}, l_{2h}, \dots l_{nh}) > M.$$

Désignons par

$$(8.) \qquad (l'_1, l'_2, \dots l'_n), \ (l''_1, l''_2, \dots l''_n), \dots \ (l^{(r)}_1, l^{(r)}_2, \dots l^{(r)}_n)$$

toutes les représentations du minimum de la forme parfaite φ' qui ne se trouvent pas dans la série (4.). En vertu de (7.), on aura

$$\varphi'(l^{(k)}_1, l^{(k)}_2, \dots l^{(k)}_n) = \varphi(l^{(k)}_1, l^{(k)}_2, \dots l^{(k)}_n) + \varrho\,\psi(l^{(k)}_1, l^{(k)}_2, \dots l^{(k)}_n);$$
$$(k=1, 2, \dots r)$$

il en résulte que

$$(9.) \qquad \varphi(l^{(k)}_1, l^{(k)}_2, \dots l^{(k)}_n) > M \text{ et } \psi(l^{(k)}_1, l^{(k)}_2, \dots l^{(k)}_n) < 0. \qquad (k=1, 2, \dots r)$$

La valeur du paramètre ϱ aura pour expression

$$\varrho = \frac{\varphi(l^{(k)}_1, l^{(k)}_2, \dots l^{(k)}_n) - M}{-\psi(l^{(k)}_1, l^{(k)}_2, \dots l^{(k)}_{nk})}. \qquad (k=1, 2, \dots r)$$

Examinons une valeur quelconque de la fonction

$$(10.) \qquad \frac{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) - M}{-\psi(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

déterminée à condition

$$(11.) \qquad \psi(x_1, x_2, \dots x_n) < 0.$$

Je dis qu'on aura l'inégalité

$$\frac{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) - M}{-\psi(x_1, x_2, \dots x_n)} \geqq \varrho.$$

Admettons le contraire. En supposant que

$$\frac{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) - M}{-\psi(x_1, x_2, \dots x_n)} < \varrho,$$

on trouvera, à cause de (11.),

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho\,\psi(x_1, x_2, \dots x_n) < M$$

ou, ce qui revient au même à cause de (7.),

$$\varphi'(x_1, x_2, \dots x_n) < M,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Nous sommes arrivés à l'important résultat suivant:

Il n'existe qu'un seul domaine R' contigu au domaine R par la face P. La forme parfaite correspondante φ' sera déterminée par l'égalité (7.) *à condition que le paramètre ϱ présente la plus petite valeur positive de la fonction* (10.).

Observons qu'en vertu de (3.) et (9.), toutes les formes quadratiques appartenant au domaine R' vérifient l'inégalité

$$\psi(f) \leqq 0.$$

On en conclut que les domaines R et R' se trouvent de deux côtés opposés du plan à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions déterminé par l'équation

$$\psi(f) = 0.$$

23. La plus petite valeur positive de la fonction (10.) peut être obtenue à l'aide d'opérations dont le nombre est fini.

Tout le problème se réduit à la recherche préalable d'un système $(l_1, l_2, \dots l_n)$ des nombres entiers vérifiant l'inégalité

$$\psi(l_1, l_2, \dots l_n) < 0$$

et satisfaisant à la condition que la forme quadratique

$$\varphi_0(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho_0\,\psi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

où on a posé

$$\varrho_0 = \frac{\varphi(l_1, l_2, \dots l_n) - M}{-\psi(l_1, l_2, \dots l_n)},$$

soit positive.

On déterminera dans ce cas tous les systèmes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ des nombres entiers vérifiant l'inégalité

$$\varphi_0(x_1, x_2, \dots x_n) \leq M \tag{12.}$$

dont le nombre est fini, et on trouvera parmi ces systèmes tous ceux qui définissent la plus petite valeur de la fonction (10.).

Désignons, comme nous l'avons fait au n° 2, par R la limite supérieure des valeurs du paramètre ϱ.

Le problème se réduit à la recherche d'un système $(l_1, l_2, \dots l_n)$ des nombres entiers vérifiant l'inégalité

$$\varphi(l_1, l_2, \dots l_n) + R\,\psi(l_1, l_2, \dots l_n) < M. \tag{13.}$$

Il peut arriver que l'équation

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + R\,\psi(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

sera vérifiée par des nombres entiers, on les déterminera à l'aide des équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + R\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Dans le cas où ces équations ne peuvent être vérifiées par aucun système de nombres entiers, on étudiera les valeurs des formes linéaires

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \Re\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

et on déterminera autant qu'on voudra de systèmes de nombres entiers vérifiant l'inégalité (13.).

En supposant qu'un système de nombres entiers $(l_1, l_2, \dots l_n)$ vérifiant l'inégalité (13.) soit déterminé, on peut chercher la plus petite valeur positive ϱ de la fonction (10.) à l'aide du procédé suivant.

L'inégalité (12.) peut être mise sous la forme

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)\left(1 - \frac{\varrho_0}{R}\right) + \frac{\varrho_0}{R}\left[\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + R\,\psi(x_1, x_2, \dots x_n)\right] \leq M,$$

et comme

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + R\,\psi(x_1, x_2, \dots x_n) \geq 0,$$

il vient

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)\left(1 - \frac{\varrho_0}{R}\right) \leqq M,$$

ou autrement

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) \leqq M \frac{R}{R - \varrho_0}.$$

Parmi les systèmes des nombres entiers vérifiant cette inégalité on trouvera tous les systèmes cherchés (8.).

Algorithme pour la recherche du domaine de l'ensemble (R) auquel appartient une forme quadratique positive arbitraire.

24. *Théorème. Chaque forme quadratique positive appartient au moins à un domaine de l'ensemble (R).*

Soit

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

une forme quadratique positive quelconque.

Choisissons un domaine quelconque R de l'ensemble (R).

Admettons que la forme f n'appartienne pas au domaine R.

Dans ce cas toutes les inégalités linéaires qui définissent le domaine R ne seront pas vérifiées. Supposons qu'on ait l'inégalité

$$\psi(f) = \Sigma p_{ij} a_{ij} < 0. \tag{1.}$$

Désignons par R_1 le domaine contigu au domaine R par la face à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions déterminée par l'équation

$$\psi(f) = 0.$$

En designant par φ et φ_1 les formes parfaites contiguës correspondant aux domaines R et R_1, on aura, comme nous l'avons vu au n° 22,

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) + \varrho\, \psi(x_1, x_2, \dots x_n) \tag{2.}$$

où $\varrho > 0$ et $\psi(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma p_{ij} x_i x_j$.

Examinons deux résultants (f, φ) et (f, φ_1). En vertu de (2.), on aura

$$(f, \varphi_1) = (f, \varphi) + \varrho\,(f, \psi),$$

et comme, à cause de (1.),

$$(f, \psi) = \Sigma p_{ij} a_{ij} < 0,$$

il vient

$$(f, \varphi) > (f, \varphi_1).$$

Supposons qu'en procédant de cette manière on obtienne une série de domaines

(3.) $$R, R_1, R_2, \ldots$$

En désignant par

(4.) $$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

la série des formes parfaites correspondantes, on aura les inégalités

$$(f, \varphi) > (f, \varphi_1) > (f, \varphi_2) > \cdots$$

tant que la forme f n'appartient pas aux domaines (3.).

En observant que toutes les formes parfaites (4.) possèdent le même minimum M, on démontrera aisément que le nombre des formes parfaites (4.) vérifiant l'inégalité

$$(f, \varphi) < P$$

est limité, quelle que soit la valeur du paramètre positif P.

On en conclut que la série de domaines (3.) se terminera nécessairement par un domaine R_m auquel appartient la forme considérée f.

Recherche d'un système complet de domaines représentant les différentes classes de l'ensemble (R).

25. Soit R un domaine quelconque de l'ensemble (R). Supposons qu'on ait déterminé tous les domaines

(1.) $$R_1, R_2, \ldots R_\sigma$$

contigus au domaine R par les différentes faces à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions, puis supposons qu'on ait déterminé tous les domaines contigus aux domaines (1.) et ainsi de suite.

Je dis qu'en procédant de cette manière on rencontrera chaque domaine de l'ensemble (R) choisi arbitrairement.

Par exemple, si l'on veut atteindre à un domaine $R^{(0)}$, on choisira une forme quadratique positive f qui est intérieure au domaine $R^{(0)}$ et on

procédera comme nous l'avons fait au n° 24. On déterminera de cette manière une série de domaines

$$R, R', R'', \ldots R^{(\mu)}, R^{(0)}$$

qui sont contigus successivement par des faces à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions.

Nous avons vu au n° 19 que l'ensemble (R) peut être partagé en des classes de domaines équivalents dont le nombre est fini.

Cherchons un système de domaines représentant les différentes classes de l'ensemble (R).

En partant du domaine R, nous avons déterminé tous les domaines

$$R_1, R_2, \ldots R_\sigma$$

contigus au domaine R. En ne considérant pas comme différents des domaines équivalents, choisissons parmi les domaines (1.) ceux qui ne sont pas équivalents deux à deux et ne sont pas équivalents au domaine R. Supposons qu'on ait obtenu la série

$$(2.) \qquad R, R_1, R_2, \ldots R_{\mu-1}$$

de domaines qui ne sont pas équivalents deux à deux.

On étudiera de la même manière les domaines contigus aux domaines $R_1, R_2, \ldots R_{\mu-1}$ et on prolongera la série (2.) en y ajoutant de nouveaux domaines

$$R_\mu, R_{\mu+1}, \ldots R_{\nu-1}$$

qui ne sont pas équivalents deux à deux et ne sont pas équivalents aux domaines (2.).

En procédant de cette manière, on obtiendra toujours une série

$$(3.) \qquad R, R_1, R_2, \ldots R_{\tau-1}$$

qui jouit de la propriété suivante: les domaines appartenant à la série (3.) ne sont pas équivalents deux à deux et tous les domaines contigus aux domaines (3.) y sont équivalents.

La série obtenue (3.) présente un système complet des représentants des différentes classes de l'ensemble (R).

26. La recherche de la série (3.) peut être facilitée notamment à l'aide de substitutions qui transforment en soi-même les domaines de l'ensemble (R).

Supposons que le domaine R correspondant à une forme parfaite φ soit déterminé par les inégalités

$$\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

En posant

$$\psi_k (x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma p_{ij}^{(k)} x_i x_j, \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

on déterminera, comme nous l'avons vu au n° 22, par les égalités

$$\varphi_k = \varphi + \varrho_k \psi_k \qquad (k=1, 2, \dots \sigma) \tag{4.}$$

σ formes parfaites $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\sigma$. On les appellera contiguës à la forme parfaite φ.

Désignons par g le groupe de substitutions qui ne changent pas la forme parfaite φ.

Les formes parfaites $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\sigma$ étant bien déterminées par la forme parfaite φ, on en conclut que toutes les substitutions du groupe g ne feront que permuter les formes $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\sigma$.

En ne considérant pas comme différentes les formes à coefficients proportionnels, on peut dire, en vertu de (4.), que le groupe g ne fera que permuter les formes quadratiques

$$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\sigma. \tag{5.}$$

Supposons qu'on ait choisi dans cette série les formes

$$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_{\mu-1} \tag{6.}$$

qui jouissent des propriétés suivantes: chaque forme de la série (5.) sera transformée en une forme de la série (6.) à l'aide d'une substitution appartenant au groupe g, les formes (6.) ne peuvent être transformées deux à deux à l'aide des substitutions du groupe g.

Les formes parfaites

$$\varphi_k = \varphi + \varrho_k \psi_k \qquad (k=1, 2, \dots \mu-1)$$

peuvent remplacer les formes parfaites (4.), donc on ne déterminera que les valeurs des paramètres $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{\mu-1}$.

Les domaines correspondants

$$R_1, R_2, \dots R_{\mu-1}$$

peuvent remplacer les domaines (1.).

Il peut arriver que parmi les domaines $R, R_1, R_2, \dots R_{\mu-1}$, se trouvent des domaines équivalents, on le reconnaîtra à l'aide des méthodes particulières.

Sur une méthode de réduction des formes quadratiques positives.

27. *Définition. On appellera réduite chaque forme quadratique positive appartenant à un domaine quelconque*

$$R, R_1, R_2, \dots R_{\tau-1} \tag{1.}$$

d'un système complet des représentants des différentes classes de l'ensemble (R).

Supposons qu'on ait déterminé toutes les substitutions

$$S_1, S_2, \dots S_m \tag{2.}$$

qui transforment les domaines contigus aux domaines (1.) par les faces à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions en ces domaines-ci.

Soit f une forme quadratique positive quelconque qui n'est pas réduite. On déterminera à l'aide de l'algorithme exposé au n° 24 une série de domaines

$$R, R', R'', \dots R^{(h)}$$

contigus successivement. Supposons que le domaine $R^{(h)}$ soit le premier qui n'appartienne pas à la série (1.)

A l'aide d'une substitution S' qui se trouve parmi celles de la série (2.), on transformera le domaine $R^{(h)}$ en un domaine R_k appartenant à la série (1.)

En transformant la forme f à l'aide de la substitution S' en une forme équivalente f', on déterminera à l'aide de la forme f' une nouvelle série de domaines

$$R_k, R'_k, \dots R_k^{(t)}$$

et ainsi de suite.

On déterminera de cette manière une série de substitutions

$$S', S'', \dots S^{(\lambda)}$$

qui, toutes, se trouvent parmi celles de la série (2.) et dont le produit

$$S = S'S'' \dots S^{(\lambda)}$$

présente une substitution S à l'aide de laquelle la forme f sera transformée en une forme réduite.

28. Supposons maintenant que deux formes réduites f et f' soient équivalentes.

Si une de ces formes, par exemple f, est intérieure au domaine R_k la forme f' y sera intérieure aussi. On en conclut que la forme f ne peut

être transformée en une forme f' qu'à l'aide d'une substitution qui transforme le domaine R_k en soi-même.

Supposons que les formes équivalentes réduites f et f' soient intérieures aux faces à μ dimensions des domaines (1.).

On posera dans ce cas des conditions supplémentaires pour les formes réduites f et f'.

Après avoir déterminé toutes les faces à μ dimensions des domaines (1.), on choisira un système complet des représentants de leurs différentes classes. Supposons que ce système soit formé par les faces à μ dimensions

$$P_1(\mu), P_2(\mu), \ldots P_\nu(\mu). \tag{3.}$$

Chaque forme quadratique positive qui est intérieure à une face à μ dimensions d'un domaine de l'ensemble (R) sera équivalente à une forme qui est intérieure aux faces (3.), on l'appellera réduite.

Deux formes quadratiques positives réduites qui sont intérieures aux faces (3.) ne seront équivalentes qu'à condition qu'elles soient intérieures à une même face et que la substitution qui transforme l'une d'elles en une autre, transforme aussi cette face en soi-même.

Nous sommes arrivés au résultat suivant:

Une forme quadratique réduite ne peut être transformée en une autre forme réduite ou en soi-même qu'à l'aide d'une substitution qui transforme en soi-même un domaine ou une face des domaines appartenant à la série (1.).

Seconde partie.

Quelques applications de la théorie générale à la recherche des formes quadratiques parfaites.

Sur la forme parfaite principale.

29. Nous ne considérons pas comme différentes les formes quadratiques à coefficients proportionnels, donc on peut choisir arbitrairement la valeur du minimum d'une forme quadratique positive.

Dans ce qui suit, on n'étudiera que les formes quadratiques parfaites dont le minimum est 1. On désignera par D le déterminant de ces formes.

Parmi les différentes formes parfaites, une forme

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \text{ *)}$$

où

$$a_{ii} = 1, \ (i = 1, 2, \ldots n), \quad a_{ij} = \frac{1}{2}, \ (i = 1, 2, \ldots n; \ j = 1, 2, \ldots n; \ i \neq j) \text{ et } D = \frac{n+1}{2^n}$$

se fait distinguer par sa simplicité.

On appellera principale la forme parfaite φ.

La forme parfaite φ possède $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations du minimum 1, qui définissent $\frac{n(n+1)}{2}$ formes linéaires

$$\lambda_1 = x_1, \ \lambda_2 = x_2, \ \ldots \lambda_n = x_n, \ \lambda_{n+1} = x_1 - x_2, \ \lambda_{n+2} = x_1 - x_3, \ \ldots \lambda_{\frac{n(n+1)}{2}} = x_{n-1} - x_n.$$

Le domaine R correspondant à la forme parfaite φ est composé de toutes les formes quadratiques déterminées par l'égalité

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = \sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \varrho_k \lambda_k^2 \text{ où } \varrho_k \geqq 0. \qquad \left(k = 1, 2, \ldots \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

De cette égalité on tire

$$\varrho_k = a_{1k} + a_{2k} + \cdots + a_{nk} \text{ tant que } k = 1, 2, \ldots n,$$

$$\varrho_k = -a_i \text{ tant que } k > n; \qquad (i = 1, 2, \ldots n; \ j = 1; 2, \ldots n; \ i \neq j)$$

donc le domaine R sera déterminé par les inégalités suivantes:

$$(1.) \qquad \begin{cases} a_{1k} + a_{2k} + \cdots + a_{nk} \geqq 0, & (k = 1, 2, \ldots n) \\ -a_{ij} \geqq 0. & (i = 1, 2, \ldots n; \ j = 1, 2, \ldots n; \ i \neq j) \end{cases}$$

En vertu de (1.), la forme parfaite φ possède $\frac{n(n+1)}{2}$ formes parfaites contiguës qui sont déterminées par les égalités

$$(2.) \qquad \begin{cases} \varphi_k = \varphi + \varrho_k x_k (x_1 + x_2 + \cdots + x_n), & (k = 1, 2, \ldots n) \\ \varphi_k = \varphi - \varrho_k x_i x_j, & \left(k = n+1, n, +2 \ldots \frac{n(n+1)}{2}, \ i = 1, 2, \ldots n; \ j = 1, 2, \ldots n; \ i \neq j\right) \end{cases}$$

30. Cherchons des formes équivalentes parmi les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ.

---

*) La forme φ a été donnée pour la première fois par *Zolotareff* dans un Mémoire intitulé: Sur une équation indéterminée du troisième degré. (*en russe.*)

A cet effet, déterminons le groupe g de substitutions qui ne changent pas la forme φ.

Examinons, en premier lieu, la forme adjointe à la forme φ.

On démontrera aisément que les coefficients de la forme adjointe à φ sont proportionnels à ceux de la forme

$$\omega = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda^2_{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{3.}$$

On en conclut, en vertu du théorème du n° 17, que la forme parfaite principale φ est extrême.

La forme quadratique ω aura pour expression

$$\omega = nx_1^2 + nx_2^2 + \cdots + nx_n^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - \cdots - 2x_{n-1}x_n$$

où

$$a_{ii} = n, \quad (i=1, 2, \ldots n) \qquad a_{ij} = -1. \quad (i=1, 2, \ldots n;\ j=1, 2, \ldots n;\ i \neq j)$$

Cherchons toutes les représentations du minimum de la forme ω.

Les formes linéaires

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{4.}$$

caractérisent $n+1$ représentations de la valeur n de la forme ω.

Je dis que la forme ω a le minimum n et toutes les représentations du minimum de la forme ω sont caractérisées par les formes linéaires (4.).

Pour le démontrer, examinons une valeur quelconque $\omega(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de la forme ω. En supposant qu'aucun des nombres $x_1, x_2, \ldots x_n$ ne s'annule, on aura, en vertu de (3.),

$$\omega(x_1, x_2, \ldots x_n) > n,$$

le système $x_1 = 1, x_2, = 1, \ldots, x_n = 1$ étant exclu.

Supposons qu'aucun des nombres $x_1, x_2, \ldots x_k$ ne s'annule et que

$$x_{k+1} = 0, \ x_{k+2} = 0, \ldots \ x_n = 0;$$

on obtient, en vertu de (3.),

$$\omega(x_1, x_2, \ldots x_k, \ 0, \ldots 0) = (n-k+1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2) + \Sigma(x_k - x_h)^2,$$

et il s'en suit que

$$\omega(x_1, x_2, \ldots x_n) \geqq k(n-k+1),$$

donc

$$\omega(x_1, x_2, \ldots x_n) > n \quad \text{tant que} \quad k \geqq 2.$$

Cela posé, désignons par G le groupe de substitutions qui transforment en soi-même le domaine R. En vertu de (3.), chaque substitution du groupe G ne change pas la forme ω.

Le groupe g étant adjoint au groupe G, on en conclut que chaque substitution du groupe g ne fera que permuter les formes linéaires (4.) en changeant le signe de quelques-unes d'entr'elles.

En observant que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = 2\varphi,$$

on en conclut que le groupe g est composé de toutes les substitutions qui permutent les formes

$$x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2, (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

Désignons

(5.) $$x_0 = -x_1 - x_2 - \cdots - x_n \text{ et } x_0' = -x_1' - x_2' - \cdots - x_n',$$

et soit $k_0, k_1, \ldots k_n$ une permutation quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots n$.

En posant

(6.) $$x_i = e_i x_k' \text{ où } e_i = \pm 1, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots n)$$

on aura

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n = e_0 x_{k_0}' + e_1 x_{k_1}' + \cdots + e_n x_{k_n}',$$

et comme, à cause de (5.),

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0 \text{ et } x_0' + x_1' + \cdots + x_n' = 0,$$

il est nécessaire que

$$e_0 = e_1 = \cdots = e_n;$$

donc les égalités (6.) se réduisent à celles-ci:

(7.) $$x_i = e x_{k_i}'. \qquad (i=0, 1, 2, \ldots n;\ e=\pm 1)$$

Le nombre des substitutions définies par les formules obtenues est égal à $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n+1)$. En ne considérant pas comme différentes deux substitutions à coefficients opposés, on dira que le groupe g est composé de $(n+1)!$ substitutions différentes.*)

---

*) Voyez: *Minkowski.* Zur Theorie der positiven quadratischen Formen. (Ce journal, t. 101, p. 200.)

A l'aide des substitutions (7.), on peut transformer chaque forme parfaite (2.) contiguë à la forme principale φ en une autre forme contiguë à la forme φ, choisie arbitrairement.

Nous sommes arrivés à l'important résultat suivant:

Toutes les formes parfaites contiguës à la forme parfaite principale sont équivalentes.

31. Choisissons une forme parmi celles de la série (2.). Posons

$$\varphi_1 = \varphi - \varrho\, x_1\, x_2.$$

Toutes les formes parfaites contiguës à la forme φ sont équivalentes à la forme φ_1.

Cherchons la valeur correspondante du paramètre ϱ.

Comme nous l'avons vu au n° 22, la valeur cherchée de ϱ présente la plus petite valeur de la fonction

$$(8.) \qquad \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) - 1}{x_1\, x_2}$$

déterminée à condition

$$x_1\, x_2 > 0.$$

On distinguera dans les recherches ultérieures deux cas:

$$1.)\ n = 2 \quad \text{et} \quad 2.)\ n \geqq 3.$$

Premier cas:

$$n = 2.$$

En comparant deux formes binaires parfaites

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_1\, x_2 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_1\, x_2 - \varrho\, x_1\, x_2,$$

on observera qu'en faisant $\varrho = 2$ on obtient la forme

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_1\, x_2$$

qui est évidemment équivalente à la forme parfaite φ, donc la forme parfaite φ_1 est celle qu'on a cherchée.

Second cas: $n \geqq 3$.

En faisant

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 0, \ldots x_n = 0,$$

on obtient une valeur de la fonction (8.) qui est égale à 1.

En faisant $\varrho = 1$, on présentera la forme φ_1 sous la forme suivante:

$$(9.) \qquad \varphi_1 = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \right].$$

Il en résulte que la forme φ_1 est positive. En vertu de ce qui a été dit au n° 23, on cherchera maintenant tous les systèmes des nombres entiers vérifiant l'inégalité

$$\varphi_1 (x_1, x_2, \ldots x_n) \leqq 1 .$$

En observant que l'inégalité

$$\varphi_1 (x_1, x_2, \ldots x_n) < 1$$

est impossible, puisque la forme positive φ_1 a des valeurs entières qui correspondent aux valeurs entières des variables, on en conclut que la forme φ_1 est parfaite.

A l'aide de l'égalité (9.), on déterminera aisément toutes les représentations du minimum de la forme parfaite φ_1.

Sur les formes parfaites binaires et ternaires et sur les domaines qui leur correspondent.

32. La forme parfaite principale binaire

$$\varphi = x^2 + xy + y^2, \quad D = \frac{3}{4}$$

possède, comme nous l'avons vu au n° 29, trois formes parfaites contiguës qui sont équivalentes à la forme principale.

On en conclut que toutes les formes binaires parfaites ne forment qu'une seule classe de formes équivalentes à la forme principale.

Le domaine R correspondant à la forme principale est composé des formes binaires (a, b, c) qui sont déterminées par l'égalité

$$a x^2 + 2 b xy + c y^2 = \varrho x^2 + \varrho' y^2 + \varrho'' (x - y)^2$$

où

$$\varrho \geqq 0, \quad \varrho' \geqq 0, \quad \varrho'' \geqq 0.$$

Il s'en suit que le domaine R est déterminé par les inégalités

$$\varrho = a + b \geqq 0, \quad \varrho' = -b \geqq 0, \quad \varrho'' = c + b \geqq 0.$$

En appelant réduites les formes binaires positives vérifiant ces inégalités, comme nous l'avons fait au n° 27, on établira une méthode de réduction bien connue, due à M. *Selling.**)

On peut partager le domaine R en six parties équivalentes

$$R^0, R^I, R^{II}, R^{III}, R^{IV}, R^V$$

qui peuvent être transformées l'une en l'autre à l'aide de six substitutions adjointes à celles qui ne changent pas la forme principale.

Le domaine R^0 sera composé de toutes les formes quadratiques déterminées par l'égalité

$$ax^2+2bxy+cy^2=\varrho y^2+\varrho'(x^2+y^2)+\varrho''(x^2+y^2+(x-y)^2)$$

où

$$\varrho\geqq 0,\quad \varrho'\geqq 0,\quad \varrho''\geqq 0.$$

Il en résulte que le domaine R^0 est déterminé par les inégalités

$$\varrho=c-a\geqq 0,\quad \varrho'=a+2b\geqq 0,\quad \varrho''=-b\geqq 0.$$

Les inégalités obtenues ne diffèrent des conditions célèbres de réduction des formes quadratiques binaires positives dues à *Lagrange* que par le choix du signe du coefficient b, ce qu'on peut faire arbitrairement dans la méthode de *Lagrange.***)

33. Examinons maintenant les formes parfaites ternaires.

La forme parfaite principale

$$\varphi=x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy,\quad D=\frac{1}{2}$$

possède six formes parfaites contiguës qui, toutes, sont équivalentes à la forme parfaite

$$\varphi_1=x^2+y^2+z^2+yz+zx$$

que nous avons trouvée au n° 31.

---

*) *Selling.* Über die binären und ternären quadratischen Formen. (Ce Journal, t. 77, p. 143.)

**) Voyez: *Lagrange.* Recherches d'Arithmétique. (Oeuvres de *Lagrange* publiées par *Serret*, t. III, p. 698.)

Gauss. Disquisitiones arithmeticae, art. 171. (Werke, t. I.)

Lejeune Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von *Dedekind*, (Braunschweig 1894, § 64, p. 155.)

La substitution

$$x=-x',\quad y=y',\quad z=-y'-z'$$

transforme la forme φ_1 en forme principale.

On en conclut que toutes les formes parfaites ternaires ne forment qu'une seule classe.

Le domaine R correspondant à la forme principale est composé de toutes les formes quadratiques ternaires $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix}$ qui sont déterminées par l'égalité

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=\varrho_1 x^2+\varrho_2 y^2+\varrho_3 z^2 \\ +\varrho_4(y-z)^2+\varrho_5(z-x)^2+\varrho_6(x-y)^2.$$

Le domaine R est déterminé par les inégalités

$$\varrho_1=a+b'+b''\geqq 0,\quad \varrho_2=a'+b''+b>0,\quad \varrho_3=a''+b+b'\geqq 0,$$
$$\varrho_4=-b\geqq 0,\quad \varrho_5=-b'\geqq 0,\quad \varrho_6=-b''\geqq 0.$$

En appelant réduites les formes quadratiques ternaires positives appartenant au domaine R, on établira une méthode de réduction due à M. *Selling*.

Le domaine R peut être partagé en 24 parties équivalentes qui peuvent être transformées l'une en l'autre à l'aide de 24 substitutions adjointes à celles qui ne changent pas la forme principale.

Une de ces parties, le domaine $\mathfrak{R}$, sera composée de toutes les formes quadratiques ternaires déterminées par l'égalité

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=\varrho_1 x^2+\varrho_2 y^2+\varrho_3 z^2 \\ +\varrho_4(y-z)^2+\varrho_5\psi+\varrho^6\omega$$

où

$$\psi=x^2+y^2+z^2+(y-z)^2+(z-x)^2,\quad \omega=x^2+y^2+z^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2.$$

On déterminera le domaine $\mathfrak{R}$ à l'aide des inégalités

$$\varrho_1=a+2b'+b''\geqq 0,\quad \varrho_2=a'+b+b'+b''\geqq 0,\quad \varrho_3=a''+b+b'+b''\geqq 0,$$
$$\varrho_4=-b+b'\geqq 0,\quad \varrho_5=-b'+b''\geqq 0,\quad \varrho_6=-b''\geqq 0.$$

Le domaine $\mathfrak{R}$ jouit des propriétés suivantes:

1. *Chaque forme quadratique ternaire positive est équivalente au moins à une forme appartenant au domaine* $\mathfrak{R}$.

2. *Deux formes quadratiques ternaires qui sont intérieures au domaine* $\mathfrak{R}$ *ne peuvent être équivalentes.*

En effectuant la transformation du domaine $\mathfrak{R}$ à l'aide de toutes les substitutions à coefficients entiers et à déterminant ± 1, on composera l'ensemble $(\mathfrak{R})$ des domaines.

Chaque domaine $\mathfrak{R}$ appartenant à l'ensemble $(\mathfrak{R})$ possède six domaines contigus par des faces à 5 dimensions.

Le domaine $\mathfrak{R}$ sera transformé en des domaines contigus à l'aide des substitutions suivantes:

$$S_1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad S_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad S_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$S_4=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad S_5=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\qquad S_6=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Chaque substitution de cette série transforme en soi-même une face correspondante à 5 dimensions du domaine $\mathfrak{R}$ et permute deux domaines de l'ensemble $(\mathfrak{R})$ qui sont contigus par cette face.

Il en résulte une méthode pour la recherche de la substitution qui transforme une forme donnée en une forme appartenant au domaine $\mathfrak{R}$. Cette méthode est analogue à celle qui a été exposée au n° 27.

En appelant réduite chaque forme quadratique ternaire positive appartenant au domaine $\mathfrak{R}$, on établira une nouvelle méthode de réduction des formes quadratiques ternaires positives qui peut être considérée comme une généralisation de la méthode de réduction de *Lagrange*.

Sur la forme parfaite $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_{n-1}x_n$.

34. Examinons la forme parfaite

$$\varphi_1=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_{n-1}x_n\text{*)}$$

obtenue au n° 31. On a posé

$$a_{ii}=1,\ {}^{(i=1,2,\ldots n)},\qquad a_{12}=0,\qquad a_{ij}=\frac{1}{2}.\ {}^{(i=1,2,\ldots n;\ j=1,2,\ldots n;\ i\neq j)}$$

---

*) La forme φ_1 a été donnée par M. M. *Korkine* et *Zolotareff* dans le Mémoire cité. (Mathematische Annalen, t. VI, p. 367.)

Il en résulte que

$$D=\frac{1}{2^{n-2}}.$$

En supposant que $n \geqq 4$, on aura n^2-n représentations du minimum de la forme φ_1 dont le nombre est plus grand que $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ces représentations du minimum de la forme φ_1 sont caractérisées par les formes linéaires

$$(1.)\begin{cases} \lambda_1=x_1, \lambda_2=x_2, \dots \lambda_n=x_n, \quad \lambda_{n+1}=x_1-x_3, \dots \lambda_{\frac{n(n+1)}{2}-1}=x_{n-1}-x_n, \\ \lambda_{\frac{n(n+1)}{2}}=x_1+x_2-x_3, \dots \quad \lambda_{\frac{n(n+1)}{2}+n-3}=x_1+x_2-x_n, \ \lambda_{\frac{n(n+1)}{2}+n-2}=x_1+x_2-x_3-x_4, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \quad \lambda_{n^2-n}=x_1+x_2-x_{n-1}-x_n. \end{cases}$$

Le domaine R_1 correspondant à la forme parfaite φ_1 est composé des formes déterminées par l'égalité

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)=\sum_{k=1}^{n^2-n} \varrho_k \lambda_k^2 \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots [n^2-n])$$

Cherchons les inégalités linéaires qui définissent le domaine R_1.

Le nombre de ces inégalités est très grand même pour $n=4$.

On surmontera les difficultés qui en résultent à l'aide d'une méthode particulière.

35. Cherchons le groupe g_1 de substitutions qui ne changent pas la forme φ_1.

A cet effet, introduisons dans nos recherches une forme quadratique ω déterminée par l'égalité

$$\omega=\frac{2}{n-1}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_{n^2-n}^2).$$

Après les réductions, on obtient

$$\omega(x_1, x_2, \dots x_n)=nx_1^2+nx_2^2+4x_3^2+\dots+4x_n^2+2(n-2)x_1x_2 \\ -4x_1x_3-\dots-4x_1x_n-4x_2x_3-\dots-4x_2x_n.$$

On peut donner à la forme ω l'expression suivante:

$$\omega(x_1, x_2, \dots x_n)=(x_1-x_2)^2+(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2+\dots+(x_1+x_2-2x_n)^2.$$

Il est aisé à démontrer que la forme adjointe à la forme parfaite φ_1 a des coefficients qui sont proportionnels à ceux de la forme ω.

Il s'en suit que la forme parfaite φ_1 est extrême.

Observons que les formes linéaires

$$x_1+x_2+\cdots+x_n,\ x_1-x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

caractérisent n représentations du minimum 4 de la forme ω. Dans le cas $n \geqq 5$, d' autres représentations du minimum de la forme ω n'existent pas; dans le cas $n=4$, on obtient 12 représentations du minimum de la forme ω.

En observant que

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2+(x_1-x_2)^2+x_3^2+\cdots+x_n^2\right],$$

on peut dire que le groupe g_1, dans le cas $n \geqq 5$, est composé de toutes les permutations des formes

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2,\quad (x_1-x_2)^2, x_3^2, \ldots x_n^2.$$

Dans le cas $n=4$, on ne déterminera de cette manière qu'un diviseur du groupe g_1.

En désignant

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1+x_2+\cdots+x_n, \quad u_2 = x_1-x_2, \quad u_3 = x_3, \cdots u_n = x_n, \\ u_1' &= x_1'+x_2'+\cdots+x_n', \quad u_2' = x_1'-x_2', \quad u_3' = x_3', \cdots u_n' = x_n', \end{aligned}$$

posons

$$u_i = e_i u'_{k_i}, \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{2.}$$

où $e_i = \pm 1$ $(i=1,2,\ldots n)$ et les indices $k_1, k_2, \ldots k_n$ présentent une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots n$.

Chaque système des égalités (2.) définit une substitution du groupe g_1.

On en conclut que le groupe g_1 est composé de $2^{n-1}\,n!$ substitutions différentes, dans le cas $n \geqq 5$.

36. Supposons que le domaine R_1 soit déterminé par les inégalités

$$\Sigma\, p_{ij}^{(k)}\, a_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots\sigma)$$

En désignant

$$\psi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\, p_{ij}^{(k)}\, x_i\, x_j, \qquad (k=1,2,\ldots\sigma)$$

on déterminera, comme nous l'avons vu au n° 22, σ formes parfaites

$$\varphi_1^{(k)} = \varphi_1 + \varrho_k\, \psi_k \qquad (k=1,2,\ldots\sigma) \tag{3.}$$

contiguës à la forme parfaite φ_1.

Toutes les substitutions du groupe g_1 ne feront qu'une permutation des formes

(4.) $$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\sigma.$$

Effectuons la transformation des formes (3.) et (4.) à l'aide de la substitution

(5.) $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1', \quad x_1 - x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \dots x_n = x_n'.$$

La série (4.) sera transformée en une série

(6.) $$\psi_1', \psi_2', \dots \psi_\sigma'.$$

Désignons par $\mathfrak{g}$ un groupe de substitutions

$$x_i' = e_i x_{k_i}'', \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

où $e = \pm 1$ $(i = 1, 2, \dots n)$ et $k_1, k_2, \dots k_n$ présentent une permutation des nombres $1, 2, \dots n$. Chaque substitution du groupe $\mathfrak{g}$ ne fait qu'une permutation des formes (6.), et à une telle substitution correspond une substitution du groupe g_1.

En désignant

$$\psi_k'(x_1' x_2' \dots x_n') = \Sigma P_{ij}^{(k)} x_i' x_j', \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

on déterminera à l'aide des inégalités

(7.) $$\Sigma P_{ij}^{(k)} a_i a_j \geqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

un domaine $\mathfrak{R}$.

La forme φ_1 sera transformée en une forme

$$\frac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2),$$

à l'aide de la substitution (5.), et chaque système $(x_1, x_2, \dots x_n)$ de nombres entiers $x_1, x_2, \dots x_n$ sera remplacé par un système $(x_1', x_2', \dots x_n')$ de nombres, entiers aussi, $x_1', x_2' \dots x_n'$ satisfaisant à la condition

(8.) $$x_1' + x_2' + \cdots + x_n' \equiv 0 \pmod 2.$$

Il en résulte que les formes linéaires (1.) qui correspondent aux différentes représentations du minimum de la forme φ_1 seront remplacées par les formes

$$x_i' + x_j' \text{ et } x_i' - x_j' \qquad (i=1, 2, \dots n;\ j=1, 2, \dots n;\ i \neq j)$$

qui caractérisent les différentes représentations du minimum 2 de la forme quadratique $x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2$, dans l'ensemble (X') de tous les systèmes $(x_1', x_2', \ldots x_n')$ des nombres entiers $x_1', x_2', \ldots x_n'$ satisfaisant à la condition (8.).

On en conclut que les arêtes du domaine $\mathfrak{R}$ seront caractérisées par les formes quadratiques

$$(x_i' + x_j')^2 \text{ et } (x_i' - x_j')^2. \qquad (i=1,2,\ldots n;\ j=1,2,\ldots n;\ i \neq j)$$

En vertu de (7.), on obtient les inégalités

$$(9.) \qquad P_{ii}^{(k)} + 2P_{ij}^{(k)} + P_{jj}^{(k)} \geqq 0 \text{ et } P_{ii}^{(k)} - 2P_{ij}^{(k)} + P_{jj}^{(k)} \geqq 0.$$
$$(k=1,2,\ldots\sigma;\ i=1,2,\ldots n;\ j=1,2,\ldots n;\ i \neq j)$$

Examinons une forme quelconque

$$(10.) \qquad \psi'(x_1', x_2', \ldots x_n') = \Sigma P_{ij} x_i' x_j'$$

appartenant à la série (6.). En vertu de (9.), on aura

$$(11.) \qquad P_{ii} + 2P_{ij} + P_{jj} \geqq 0 \text{ et } P_{ii} - 2P_{ij} + P_{jj} \geqq 0.$$
$$(i=1,2,\ldots n;\ j=1,2,\ldots n;\ i \neq j)$$

Parmi ces conditions on trouvera t égalités qui définissent les coefficients de la forme (10.) à un facteur commun près. Toutes ces égalités seront de forme

$$(12.) \qquad P_{kk} - 2e_{kh}P_{kh} + P_{hh} = 0 \text{ où } e_{kh} = \pm 1.$$

Supposons qu'il existe une combinaison des valeurs de k et h satisfaisant aux conditions

$$(13.) \qquad P_{kk} + 2P_{kh} + P_{hh} > 0 \text{ et } P_{kk} - 2P_{kh} + P_{hh} > 0.$$

En observant que le coefficient P_{kh} n'entre pas dans les autres inégalités (11.), on en conclut que le coefficient P_{kh} reste indéterminé.

Pour que tous les coefficients de la forme (10.) soient déterminés par les conditions (12.), à un facteur commun près, il est nécessaire, le coefficient P_{kh} étant indépendant des autres coefficients, que tous les coefficients qui restent s'annulent.

En vertu des inégalités (13.), cette supposition est impossible, donc l'égalité (12.) doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs des indices k et h.

On obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions

$$(14.) \qquad P_{kk} - 2e_{kh}P_{kh} + P_{hh} = 0 \text{ où } e_{kh} = \pm 1. \qquad (k=1,2,\ldots n;\ h=1,2,\ldots n;\ k \neq h)$$

qui servent à déterminer les coefficients P_{kh} en fonctions des coefficients

(15.) $$P_{11}, P_{22}, \dots P_{nn}.$$

Les coefficients $P_{11}, P_{22}, \dots P_{nn}$ ne peuvent être indépendants, et seront liés au moins par $n-1$ équations de la forme (12.). Donc, au moins dans $n-1$ cas, on aura les équations de la forme

(16.) $$P_{kk} \pm 2P_{kh} + P_{hh} = 0.$$

Pour abréger, appelons ces équations doubles.

Cela posé, supposons, en premier lieu, qu'il existe au moins un coefficient parmi ceux de la série (15.) qui n'entre pas dans les équations doubles (16.). On peut supposer, pour fixer les idées, que P_{11} soit un tel coefficient.

Le coefficient P_{11} étant indépendant, tous les coefficients $P_{22}, \dots P_{nn}$ s'annuleront et, en vertu de (14.), les coefficients

$$P_{23}, P_{24}, \dots P_{n-1,n}$$

s'annuleront aussi.

Le coefficient P_{11} sert à déterminer les coefficients $P_{12}, P_{13}, \dots P_{1n}$ à l'aide des équations (14.) qui prennent la forme

$$P_{11} - 2e_{1k}P_{1k} = 0; \qquad (k=2, 3, \dots n)$$

il s'en suit que

$$2P_{1k} = e_{1k}P_{11}. \qquad (k=2, 3, \dots n)$$

Comme, en vertu de la supposition faite,

$$P_{11} + 2e_{1k}P_{1k} > 0, \qquad (k=2, 3, \dots n)$$

il est nécessaire que

$$P_{11} > 0,$$

et on peut poser

$$P_{11} = 1.$$

La forme (10.) est déterminée par les égalités obtenues, et on aura

(17.) $$\psi'(x'_1, x'_2, \dots x'_n) = x'^2_1 + e_{12}x'_1x'_2 + \dots + e_{1n}x'_1x'_n.$$

En remplaçant les variables

$$e_{12}x'_2,\ e_{13}x'_3, \dots e_{1n}x'_n$$

par les variables $x'_2, \dots x'_n$, on remplacera la forme (17.) par la forme

$$\psi'(x'_1, x'_2, \dots x'_n) = x'_1 (x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n).$$

Supposons, en second lieu, que tous les coefficients (15.) entrent dans les équations doubles (16.).

Au moins un des coefficients (15.) n'est pas nul. Supposons que $P_{kk} \neq 0$. D'après l'hypothèse, le coefficient P_{kk} entre au moins dans une équation double

$$P_{kk} \pm 2 P_{kh} + P_{hh} = 0.$$

Il s'en suit que

$$P_{kh} = 0 \quad \text{et} \quad P_{kk} + P_{hh} = 0,$$

donc les coefficients P_{kk} et P_{hh} ont des signes opposés. Supposons, pour fixer les idées, que

(18.) $$P_{11} = -1.$$

En examinant les inégalités

$$P_{11} \pm 2 P_{1k} + P_{kk} \geq 0, \qquad (k = 2, 3, \dots n)$$

on en déduit

$$P_{kk} > 0. \qquad (k = 2, 3, \dots n)$$

Il en résulte que l'équation double

$$P_{kk} \pm 2 P_{kh} + P_{hh} = 0$$

devient impossible tant que $k \geq 2$ et $h \geq 2$, donc toutes les équations doubles seront de la forme

$$P_{11} \pm 2 P_{1k} + P_{kk} = 0. \qquad (k = 2, 3, \dots n)$$

De ces équations on tire, en vertu de (18.),

(19.) $$P_{kk} = 1 \quad \text{et} \quad P_{1k} = 0. \qquad (k = 2, 3, \dots n)$$

En substituant les valeurs obtenues des coefficients $P_{11}, P_{22}, \dots P_{nn}$ dans les équations

$$P_{kk} - 2 e_{kh} P_{kh} + P_{hh} = 0 \quad \text{où} \quad e_{kh} = \pm 1, \qquad (k = 2, 3, \dots n;\ h = 2, 3, \dots n;\ k \neq h)$$

on obtient, à cause de (19.),

$$P_{kh} = e_{kh} \quad \text{où} \quad e_{kh} = \pm 1. \qquad (k = 2, 3, \dots n;\ h = 2, 3, \dots n;\ k \neq h)$$

La forme (10.) aura pour expression

$$(20.)\qquad \psi'(x'_1, x'_2, \dots x'_n) = -x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + \cdots + x'^2_n + 2e_{23}x'_2x'_3 + 2e_{24}x'_2x'_4 + \cdots + 2e_{n-1,n}x'_{n-1}x'_n$$

où

$$e_{23} = \pm 1,\ e_{24} = \pm 1, \dots\ e_{n-1,n} = \pm 1.$$

On obtient de cette manière $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ formes différentes. En permutant les variables et en changeant leurs signes, on diminuera notamment le nombre des différentes formes déterminées par la formule (20.).

37. A l'aide des résultats obtenus, on peut reconnaître aisément, si une forme quadratique donnée $\Sigma a_{ij}x_ix_j$ appartient ou non au domaine $\mathfrak{R}$.

On examinera, en premier lieu, les sommes

$$e_{1k}a_{1k} + e_{2k}a_{2k} + \cdots + e_{nk}a_{nk} \quad \text{où} \quad e_{1k} = \pm 1,\ e_{2k} = \pm 1, \dots e_{nk} = \pm 1 \text{ et } e_{kk} = 1. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Toutes ces sommes doivent être positives ou nulles. Les inégalités

$$(21.)\qquad a_{kk} - |a_{1k}| - \cdots - |a_{k-1,k}| - |a_{k+1,k}| - \cdots - |a_{nk}| \geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

présentent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités

$$e_{1k}a_{1k} + e_{2k}a_{2k} + \cdots + e_{nk}a_{nk} \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots n)$$

aient lieu.

Examinons, en second lieu, les inégalités

$$-a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} + 2e_{23}a_{23} + 2e_{24}a_{24} + \cdots + 2e_{n-1,n}a_{n-1,n} \geq 0$$

où

$$e_{23} = \pm 1,\ e_{24} = \pm 1, \dots\ e_{n-1,n} = \pm 1.$$

Ces inégalités peuvent être remplacées par une seule

$$-a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} - 2|a_{23}| - 2|a_{24}| - \cdots - 2|a_{n-1,n}| \geqq 0.$$

On présentera cette inégalité sous la forme

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} - 2|a_{12}| - 2|a_{13}| - \cdots - 2|a_{n-1,n}| \geqq 2(a_{11} - |a_{12}| - \cdots - |a_{1n}|).$$

En permutant les variables, on obtient n inégalités

$$(22.)\qquad \begin{aligned} &a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} - 2|a_{12}| - 2|a_{13}| - \cdots \\ &- 2|a_{n-1,n}| \geqq 2(a_{kk} - |a_{1k}| - \cdots - |a_{nk}|) \text{ où } k = 1, 2, \dots n. \end{aligned}$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant. On peut reconnaître aisément, si une forme quadratique positive donnée f appartient ou non au domaine R_1. A cet effet, on transformera la forme f en une forme f' à l'aide de la substitution adjointe à la substitution (5.) et on examinera $2n$ inégalités (21.) et (22.). Pour que la forme f appartienne au domaine R_1, il faut et il suffit que la forme f' vérifie $2n$ inégalités (21.) et (22.)

38. Revenons maintenant aux formes parfaites (3.) contiguës à la forme parfaite φ_1. Nous avons vu que ces formes seront transformées à l'aide de la substitution (5.) en des formes

$$\frac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2) + \varrho_k \psi_k'(x_1', x_2', \ldots x_n'). \qquad (k = 1, 2, \ldots \sigma)$$

Les formes $\psi_1', \psi_2', \ldots \psi_\sigma'$ peuvent être transformées à l'aide des substitutions appartenant au groupe $\mathfrak{g}$ en des formes

$$(23.)\quad \begin{cases} 1.) \quad x_3'(-x_1' - x_2' + x_3' + x_4' + \cdots + x_n'), \\ 2.) \quad -x_2'^2 + x_1'^2 + x_3'^2 + \cdots + x_n'^2 - 2x_1'x_3' - \cdots - 2x_1'x_n' + 2e_{34}x_3'x_4' \\ \qquad\qquad + \cdots + 2e_{n-1,n}x_{n-1}'x_n', \end{cases}$$

où

$$e_{34} = \pm 1, \ldots \quad e_{n-1,n} = \pm 1.$$

La substitution inverse à la substitution (5.):

$$x_1' = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad x_2' = x_1 - x_2, \quad x_3' = x_3, \ldots x_n' = x_n$$

transformera les formes (23.) en des formes

1.) $-2x_1x_3$,

2.) $4(x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - \cdots - \delta_{n-1,n}x_{n-1}x_n)$, où $\delta_{34} = 0$ ou $1, \ldots \delta_{n-1\,n} = 0$ ou 1.

On en conclut que toutes les formes parfaites contiguës à la forme φ_1 sont équivalentes aux formes parfaites suivantes:

1.) $\varphi_1 - \varrho x_1x_3$,

2.) $\varphi_1 + \varrho(x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - \cdots - \delta_{n-1,n}x_{n-1}x_n)$,

où

$$\delta_{34} = 0 \text{ ou } 1, \ldots \quad \delta_{n-1,n} = 0 \text{ ou } 1.$$

Recherche de la forme parfaite $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$.

39. La forme parfaite φ_1 possède, comme nous l'avons vu au n° 38, plusieurs formes parfaites contiguës qui ne sont pas équivalentes.

On ne déterminera dans la suite qu'une seule forme parfaite

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$$

contiguë à la forme parfaite φ_1.

Nous avons démontré au n° 22 que le paramètre ϱ présente la plus petite valeur de la fonction

$$\varrho = \frac{\varphi_1(x_1, x_2, \dots x_n) - 1}{x_1 x_3} \tag{1.}$$

déterminée à condition que

$$x_1 x_3 > 0. \tag{2.}$$

En posant

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1,\ x_5 = 0, \dots\ x_n = 0,$$

on obtient la valeur de la fonction (1.) qui est égale à 1, donc

$$0 < \varrho \leqq 1. \tag{3.}$$

Effectuons la transformation de la fonction (1.) à l'aide de la substitution

$$x_3 = x_1',\ -x_1 + x_2 = x_2',\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = -x_3',\ x_4 = x_4', \dots x_n = x_n' \tag{4.}$$

on aura

$$\varrho = \frac{x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2 - 2}{-x_1'(x_1' + x_2' + \dots + x_n')} \tag{5.}$$

où, à cause de (2.),

$$x_1'(x_1' + x_2' + \dots + x_n') < 0 \tag{6.}$$

et, à cause de (4.),

$$x_1' + x_2' + \dots + x_n' \equiv 0 \pmod 2,$$

les variables $x_1', x_2', \dots x_n'$ étant des nombres entiers.

Désignons

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \varrho\, x_1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

En vertu de (5.) et (6.), la valeur cherchée de ϱ est définie par les conditions que l'inégalité

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) < 2$$

est impossible, tant que les nombres entiers $x_1, x_2, \dots x_n$ vérifient la congruence

$$(7.) \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv 0 \pmod 2,$$

et qu'il existe au moins un système $(l_1, l_2, \dots l_n)$ vérifiant l'équation

$$(8.) \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n) = 2$$

et la congruence (7.).

La forme f peut être déterminée par l'égalité

$$(9.) \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n) = \left(x_2 + \varrho \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(x_3 + \varrho \frac{x_1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(x_n + \varrho \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(1 + \varrho - \frac{n-1}{4}\varrho^2\right) x_1^2.$$

Il s'en suit que la forme f sera positive, à condition que

$$1 + \varrho - \frac{n-1}{4}\varrho^2 > 0,$$

et la limite supérieure R des valeurs de ϱ vérifie l'équation

$$1 + R - \frac{n-1}{4} R^2 = 0,$$

donc

$$(10.) \qquad R = \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

40. Cela posé, examinons un système $(l_1, l_2, \dots l_n)$ de nombres entiers vérifiant l'équation (8.) et la congruence (7.).

Je dis qu'on aura les inégalités

$$(11.) \qquad \left| l_i + \varrho \frac{l_1}{2} \right| \leq 1. \qquad (i = 2, \dots n)$$

En effet, si l'on suppose que

$$\left| l_k + \varrho \frac{l_1}{2} \right| > 1,$$

on déterminera $e_k = \pm 1$ de manière que l'inégalité

$$\left| l_k + 2e_k + \frac{l_1}{2} \right| < \left| l_k + \varrho \frac{l_1}{2} \right|$$

ait lieu, et on posera

$$l'_i = l_i \text{ et } l'_k = l_k + 2e_k. \qquad (i=1, 2, \dots n;\ i \neq k)$$

La condition (7.) sera satisfaite, et on aura, en vertu de (9.), l'inégalité

$$f(l'_1, l'_2, \dots l'_n) < 2,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

En examinant les inégalités (11.) et la forme f à l'aide de la formule (9.), on démontrera aisément que parmi les systèmes des nombres entiers vérifiant l'équation (8.) à condition (7.) se trouve au moins un système $(l_1, l_2, \dots l_n)$ satisfaisant aux conditions

$$(12.) \qquad f(l_1, l_2, \dots l_n) = 2$$

et

$$(13.) \qquad l_2 = l_3 + \delta,\ l_3 = l_4 = \dots = l_n \text{ où } \delta = 0 \text{ ou } \pm 1.$$

En vertu de (6.), on aura l'inégalité

$$l_1 [l_1 + \delta + (n-2)\, l_3] < 0.$$

On peut supposer que

$$(14.) \qquad l_1 < 0,$$

et il s'en suit que

$$l_1 + \delta + (n-2)\, l_3 > 0,$$

donc, à cause de (13.) et (14.), il est nécessaire que

$$l_3 > 0.$$

Je dis que $l_3 = 1$. Pour le démontrer, effectuons la transformation de la forme quadratique positive $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ à l'aide de la substitution

$$(15.) \qquad x_1 = -x,\ x_2 = y,\ x_3 = x_4 = \dots = x_n = z;$$

on obtiendra une forme positive ternaire

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + (n-2)\, z^2 - \varrho\, x(-x + y + (n-2)\, z).$$

En vertu de la condition (7.), les nombres entiers x, y, z vérifient la congruence

$$(16.) \qquad x + y + (n-2)\, z \equiv 0 \pmod 2.$$

En désignant

$$u = -l_1,\ v = l_2,\ w = l_3,$$

on aura, à cause de (12.), (13.) et (15.),

$$F(u, v, w) = 2,$$

et la condition (16.) sera remplie.

L'inégalité

$$F(x, y, z) < 2$$

est impossible tant que les nombres entiers x, y, z vérifient la congruence (16.).

Effectuons la transformation de la forme $F(x, y, z)$ l'aide de la substitution

$$(17.) \qquad x = x' + y' + (n-2)\,z',\quad y = x' - y',\quad z = z'.$$

L'ensemble des systèmes (x, y, z) des nombres entiers vérifiant la congruence (16.) sera remplacé par l'ensemble des systèmes (x', y', z') des nombres entiers arbitraires.

Désignons par $F'(x', y', z')$ la forme transformée. Soient D et D' les déterminants des formes $F(x, y, z)$ et $F'(x', y', z')$. En vertu de (17.), on aura

$$(18.) \qquad D' = 4\,D.$$

Observons que le nombre 2 présente le minimum de la forme obtenue $F'(x', y', z')$ déterminé dans l'ensemble de tous les systèmes (x', y', z') des nombres entiers, le système $(0, 0, 0)$ étant exclu.

En vertu du théorème connu*) sur la limite du minimum d'une forme quadratique positive ternaire, on aura l'inégalité

$$2 \leqq \sqrt[3]{2\,D'}.$$

Il s'en suit que

$$D' \geqq 4,$$

*) Voyez: *Gauss.* Werke, t. II, p. 192, Göttingen 1863.

Lejeune-Dirichlet. Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. (Ce journal, t. 40, p. 209.)

Hermite. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires. (Ce journal, t. 40, p. 173.)

et à cause de (18.), on obtient

$$D \geq 1. \tag{19.}$$

Cela posé, observons que la forme $F(x, y, z)$ a les valeurs suivantes:

$$F(u, v, w) = 2, \quad F(1, 1, 0) = 2, \quad F(1, -1, 0) = 2 + 2\varrho.$$

En transformant la forme $F(x, y, z)$ à l'aide de la substitution

$$\begin{pmatrix} u, & 1, & 1 \\ v, & 1, & -1 \\ w, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \tag{20.}$$

on obtient une forme

$$F_0(x', y', z') = a x'^2 + a' y'^2 + a'' z'^2 + 2 b y' z' + 2 b' z' x' + 2 b'' x' y',$$

où

$$a = 2, \; a' = 2, \; a'' = 2 + 2\varrho \text{ et } b = \varrho. \tag{21.}$$

Le produit $a \cdot a' \cdot a''$ dans chaque forme quadratique ternaire positive $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$ est, comme on sait, toujours supérieur au déterminant de la forme, à moins que les coefficients b, b', b'' ne s'annulent simultanément.

En désignant par D_0 le déterminant de la forme $F_0(x', y', z')$, on aura, à cause de (21.),

$$D_0 < 4(2 + 2\varrho),$$

et comme, en vertu de (20.),

$$D_0 = 4 w^2 D,$$

il vient

$$w^2 D < 2 + 2\varrho.$$

En vertu de (3.) et (19.), on obtient l'inégalité

$$w^2 < 4,$$

donc

$$w = 1.$$

41. En revenant aux égalités (13.), on obtient

$$l_1 = -u, \; l_2 = \delta \text{ et } l_3 = 1, \; l_4 = 1, \ldots \; l_n = 1,$$

où

$$u > 0 \text{ et } \delta = 0, 1, 2.$$

En substituant les valeurs trouvées de $l_1, l_2, \ldots l_n$ dans la fonction (5.), on aura

$$\varrho = \frac{u^2 + \delta^2 + n - 4}{u(-u + \delta + n - 2)}. \tag{22.}$$

Il reste à déterminer la plus petite valeur de cette fonction à condition que

$$u > 0,\ -u + \delta + n - 2 > 0,\ u \equiv n + \delta \pmod 2 \text{ et } \delta = 0, 1, 2. \tag{23.}$$

Posons

$$u = \sqrt{n} - 1 + \alpha, \tag{24.}$$

α étant un nombre réel.

La fonction (22.) prend la forme

$$\varrho = \frac{2n + (2\alpha - 2)\sqrt{n} + \alpha^2 - 2\alpha + \delta^2 - 3}{n\sqrt{n} + (\alpha - 2)\, n + (\delta - 2\alpha)\sqrt{n} + 1 - \alpha^2 + \alpha\delta - \delta}.$$

La valeur cherchée de ϱ doit vérifier l'inégalité

$$\varrho < R,$$

donc à cause de (10.), on aura

$$\frac{2}{\sqrt{n} - 1} - \varrho > 0. \tag{25.}$$

Après les réductions, on obtient

$$\frac{2}{\sqrt{n} - 1} - \varrho = \frac{(1 - \delta^2 + 2\delta - \alpha^2)\sqrt{n} + \delta^2 - 2\delta - 1 - \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha\delta}{(\sqrt{n} - 1)[n\sqrt{n} + (\alpha - 2)\, n + (\delta - 2\alpha)\sqrt{n} + 1 - \alpha^2 + \alpha\delta - \delta]}$$

et, à cause de (25.), il vient

$$(1 - \delta^2 + 2\delta - \alpha^2)\sqrt{n} + \delta^2 - 2\delta - 1 - \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha\delta > 0.$$

En observant que

$$\delta^2 - 2\delta - 1 - \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha\delta \leqq 0 \text{ tant que } \delta = 0,\ 1,\ 2,$$

on obtient l'inégalité

$$1 - \delta^2 + 2\delta - \alpha^2 > 0.$$

En faisant $\delta = 0$ et 2, on aura

$$\alpha^2 < 1 \text{ tant que } \delta = 0 \text{ et } 2. \tag{26.}$$

En faisant $\delta = 1$, on aura

(27.) $$\alpha^2 < 2 \text{ tant que } \delta = 1.$$

Désignons par m un nombre entier positif déterminé à l'aide des inégalités

(28.) $$\sqrt{n} - 1 \leq m < \sqrt{n}.$$

En posant

(29.) $$n = m^2 + p,$$

on aura un nombre entier positif p vérifiant les inégalités

(30.) $$0 < p \leq 2m + 1.$$

Premier cas: p est un nombre impair.

En vertu de (23.) et (29.), on aura une congruence

$$u \equiv m^2 + p + \delta \pmod 2,$$

p étant un nombre impair; on peut poser

(31.) $$u = m^2 + \delta + 1 + 2t.$$

En posant

$$\sqrt{n} = m + \xi,$$

on aura

(32.) $$0 < \xi \leq 1,$$

à cause de (28.). En vertu de (24.), on obtient l'égalité

$$u = m - 1 + \xi + \alpha,$$

et à cause de (31.), il vient

(33.) $$\xi + \alpha = m^2 - m + 2 + 2t + \delta.$$

En supposant que $\delta = 0$ ou 2, on obtient

$$\xi + \alpha \equiv 0 \pmod 2.$$

En vertu de (26.) et (32.), il est nécessaire que

$$\xi + \alpha = 0,$$

donc

$$u = m - 1 \text{ tant que } \delta = 0 \text{ et } \delta = 2.$$

En supposant que $\delta = 1$, on obtient, à cause de (33.),

$$\xi + \alpha \equiv 1 \pmod 2.$$

En vertu de (27.) et (32.), le nombre entier $\xi + \alpha$ ne peut avoir que deux valeurs

$$\xi + \alpha = \pm 1,$$

et il en résulte que

$$u = m \text{ ou } m-2 \text{ tant que } \delta = 1.$$

On obtient quatre valeurs de la fonction (22.):

$$\varrho_1 = \frac{(m-1)^2 + n - 4}{(m-1)(n-m-1)}, \qquad \varrho_2 = \frac{m^2 + n - 3}{m(n-m-1)},$$

$$\varrho_3 = \frac{(m-2)^2 + n - 3}{(m-2)(n-m+1)}, \qquad \varrho_4 = \frac{(m-1)^2 + n}{(m-1)(n-m+1)}$$

parmi lesquelles se trouve la plus petite valeur cherchée de ϱ.

En observant que

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{p-3}{m(m-1)(n-m-1)},$$

$$\varrho_4 - \varrho_1 = \frac{2p+2}{(m-1)(n-m-1)(n-m+1)},$$

$$\varrho_3 - \varrho_4 = \frac{p+1}{(m-1)(m-2)(n-m+1)},$$

on obtient, à cause de (30.),

$$\varrho_1 < \varrho_4 < \varrho_3$$

et

$$\varrho_2 \leqq \varrho_1 \text{ tant que } p \geqq 3,$$

$$\varrho_1 < \varrho_2 \text{ tant que } p < 3.$$

Il n'existe qu'une seule valeur impaire de p vérifiant les inégalités $0 < p < 3$, donc on aura l'inégalité

$$\varrho_1 < \varrho_2 \text{ tant que } p = 1.$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant.

La plus petite valeur de ϱ aura pour expression

(34.) $$\varrho = \frac{m^2 + n - 3}{m(n-m-1)},$$

à condition que $n = m^2 + p$, *et le nombre impair* p *vérifie les inégalités*

$$3 \leqq p \leqq 2m + 1.$$

Dans le cas $n = m^2 + 1$, *la plus petite valeur de* ϱ *sera*

$$\varrho = \frac{(m-1)^2 + n - 4}{(m-1)\,(n-m-1)}.$$

Second cas: p est un nombre pair.

On aura, à cause de (23.), l'inégalité

$$u \equiv m^2 + \delta \pmod 2.$$

En posant

$$u = m^2 + \delta + 2t,$$

on aura les égalités

$$u = m - 1 + \xi + \alpha \quad \text{et} \quad \xi + \alpha = m^2 - m + 2t + \delta + 1.$$

En supposant que $\delta = 0$ ou 2, on obtient

$$\xi + \alpha = 1,$$

et il s'en suit que

$$u = m \quad \text{tant que } \delta = 0 \text{ et } 2.$$

En supposant que $\delta = 1$, on obtient

$$\xi + \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \xi + \alpha = 2,$$

donc

$$u = m - 1 \quad \text{ou} \quad u = m + 1 \quad \text{tant que} \quad \delta = 1.$$

La plus petite valeur de ϱ se trouve parmi les valeurs suivantes de la fonction (22.):

$$\varrho_1 = \frac{m^2 + n - 4}{m\,(n-m-2)}, \qquad \varrho_2 = \frac{(m+1)^2 + n - 3}{(m+1)\,(n-m-2)},$$

$$\varrho_3 = \frac{(m-1)^2 + n - 3}{(m-1)\,(n-m)}, \qquad \varrho_4 = \frac{m^2 + n}{m\,(n-m)}.$$

En observant que

$$\varrho_2 - \varrho_1 = \frac{2m + 4 - p}{m\,(m+1)\,(n-m-2)},$$

$$\varrho_1 - \varrho_4 = \frac{4m - 2p}{m\,(n-m)\,(n-m-2)},$$

$$\varrho_4 - \varrho_3 = \frac{2m - p}{m\,(m-1)\,(n-m)},$$

on obtient, à cause de (30.),

$$\varrho_3 \leqq \varrho_4 \leqq \varrho_1 < \varrho_2.$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant:

La plus petite valeur de ϱ s'exprime par l'égalité

$$\varrho = \frac{(m-1)^2 + n - 3}{(m-1)(n-m)}$$

à condition que $n = m^2 + p$, et le nombre pair p vérifie les inégalités

$$0 < p < 2m + 1.$$

42. Nous avons déterminé la valeur du paramètre ϱ qui définit la forme parfaite $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$. Le déterminant de cette forme D, en vertu de (4.) et (9.), aura pour expression

$$(35.) \qquad D = \frac{4 + 4\varrho - (n-1)\varrho^2}{2^n}.$$

La valeur correspondante de la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ définie au n° 16 sera

$$\mathfrak{M}(a_{ij}) = 2\sqrt[n]{\frac{1}{4 + 4\varrho - (n-1)\varrho^2}}.$$

En appliquant les formules obtenues aux cas:

$$n = 4, 5, 6, 7, 8,$$

on obtient la même valeur de ϱ

$$\varrho = 1.$$

Les formes parfaites correspondantes seront

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_4^2 + x_1 x_4 + \cdots + x_3 x_4, \quad D = \frac{5}{2^4}, \quad \mathfrak{M}(a_{ij}) = 2\sqrt[4]{\frac{1}{5}};$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 + x_1 x_4 + \cdots + x_4 x_5, \quad D = \frac{4}{2^5}, \quad \mathfrak{M}(a_{ij}) = 2\sqrt[5]{\frac{1}{4}};$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 + x_1 x_4 + \cdots + x_5 x_6, \quad D = \frac{3}{2^6}, \quad \mathfrak{M}(a_{ij}) = 2\sqrt[6]{\frac{1}{3}};$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_7^2 + x_1 x_4 + \cdots + x_6 x_7, \quad D = \frac{2}{2^7}, \quad \mathfrak{M}(a_{ij}) = 2\sqrt[7]{\frac{1}{2}};$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_8^2 + x_1 x_4 + \cdots + x_7 x_8, \quad D = \frac{1}{2^8}, \quad \mathfrak{M}(a_{ij}) = 2.$$

On rencontre toutes ces formes parfaites dans le Mémoire de M. M. *Korkine* et *Zolotareff*: Sur les formes quadratiques.*)

Les formules obtenues donnent un moyen pour la recherche des différentes formes parfaites qui vérifient l'inégalité

$$\mathfrak{M}(a_{ij}) > 2.$$

En faisant, par exemple, $n = 12$, on aura

$$m = 3 \quad \text{et} \quad \rho = 3.$$

En vertu de (34.), on obtient

$$\varrho = \frac{3}{4},$$

donc, à cause de (35.),

$$D = \frac{13}{16} \cdot \frac{1}{2^{12}},$$

et il s'en suit que

$$\mathfrak{M}(a_{ij}) = 2 \sqrt[12]{\frac{16}{13}} > 2.$$

Toutes les formes extrêmes étudiées par M. M. *Korkine* et *Zolotareff* ne donnaient pas à la fonction $\mathfrak{M}(a_{ij})$ des valeurs qui surpassent 2.

Sur les formes parfaites quaternaires et sur les domaines qui leur correspondent.

43. Nous avons vu au n° 29 qu'à la forme parfaite principale quaternaire

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \quad D = \frac{5}{2^4}$$

correspond le domaine R composé des formes

$$\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2 + \varrho_4 x_4^2 + \varrho_5 (x_1 - x_2)^2 + \varrho\ (x_1 - x_3)^2 + \varrho_7 (x_1 - x_4)^2 + \varrho_8 (x_2 - x_3)^2 + \varrho_9 (x_2 - x_4)^2 + \varrho_{10} (x_3 - x_4)^2.$$

Toutes les formes parfaites contiguës à la forme principale φ sont équivalentes à la forme

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \quad D = \frac{1}{4}.$$

*) Mathematische Annalen, t. VI, p. 367.

Le domaine correspondant R_1 est composé des formes

$$\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2 + \varrho_4 x_4^2 + \varrho_5 (x_1 - x_3)^2 + \varrho_6 (x_1 - x_4)^2 + \varrho_7 (x_2 - x_3)^2 + \varrho_8 (x_2 - x_4)^2$$
$$+ \varrho_9 (x_3 - x_4)^2 + \varrho_{10} (x_1 + x_2 - x_3)^2 + \varrho_{11} (x_1 + x_2 - x_4)^2 + \varrho_{12} (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2.$$

Examinons les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_1.

Nous avons démontré au n° 38 que toutes ces formes sont équivalentes aux formes

1.) $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$,

2.) $\varphi_1 + \varrho\,(x_1 x_2 - \delta\, x_3 x_4)$, où $\delta = 0$ ou 1.

Examinons trois formes parfaites

1.) $\varphi_1 + \varrho\, x_1 x_2$, 2.) $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$, 3.) $\varphi_1 + \varrho\,(x_1 x_2 - x_3 x_4)$.

1.) En faisant $\varrho = 1$ dans la forme $\varphi_1 + \varrho\, x_1 x_2$, on obtient la forme parfaite principale φ.

2.) Observons que la forme $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$ est équivalente à la forme $\varphi_1 + \varrho\, x_1 x_2$.

En effet, la substitution

$$x_1 = -x_1',\ x_2 = x_3',\ x_3 = x_2',\ x_4 = x_1' + x_4'$$

ne change pas la forme φ_1 et transforme la forme $x_1 x_2$ en la forme $-x_1' x_3'$.

3.) En faisant $\varrho = 1$ dans la forme $\varphi_1 + \varrho\,(x_1 x_2 - x_3 x_4)$, on obtient la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4$$

qui est évidemment équivalente à la forme parfaite φ_1.

On en conclut que toutes les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_1 sont équivalentes aux formes φ et φ_1.

Il s'en suit que l'ensemble de toutes les formes parfaites quaternaires peut être partagé en deux classes représentées par les formes parfaites φ et φ_1.

L'ensemble (R) des domaines correspondant aux différentes formes parfaites quaternaires est composé de deux classes, aussi, représentées par les domaines R et R_1.

Sur les formes parfaites à cinq variables et sur les domaines qui leur correspondent.

44. Nous avons déterminé deux formes parfaites à cinq variables

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_4x_5, \quad D = \frac{6}{2^5},$$

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_4x_5, \quad D = \frac{4}{2^5}.$$

Les domaines correspondants R et R_1 seront composés des formes

R) $\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \cdots + \varrho_5 x_5^2 + \varrho_6 (x_1 - x_2)^2 + \varrho_7 (x_1 - x_3)^2 + \cdots + \varrho_{15} (x_4 - x_5)^2,$

R$_1$) $\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \cdots + \varrho_5 x_5^2 + \varrho_6 (x_1 - x_3)^2 + \cdots + \varrho_{20} (x_1 + x_2 - x_4 - x_5)^2.$

Examinons les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_1. Nous avons démontré au n° 38 que toutes ces formes sont équivalentes aux formes

(1.) 1.) $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3,$

2.) $\varphi_1 + \varrho (x_1 x_2 - \delta\, x_3 x_4 - \delta' x_3 x_5 - \delta'' x_4 x_5),$

où

$$\delta = 0 \text{ ou } 1, \quad \delta' = 0 \text{ ou } 1, \quad \delta'' = 0 \text{ ou } 1.$$

Dans le second cas on obtient 8 formes parfaites. En permutant les variables x_3, x_4, x_5 on remplacera les formes (1.) par 4 formes; donc toutes les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_1 sont équivalentes aux 5 formes suivantes:

1.) $\varphi_1 + \varrho\, x_1 x_2$, 2.) $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$, 3.) $\varphi_1 + \varrho (x_1 x_2 - x_4 x_5)$,
4.) $\varphi_1 + \varrho (x_1 x_2 - x_3 x_5 - x_4 x_5)$, 5.) $\varphi_1 + \varrho (x_1 x_2 - x_3 x_4 - x_3 x_5 - x_4 x_5)$.

1.) En faisant $\varrho = 1$ dans la forme parfaite $\varphi_1 + \varrho\, x_1 x_2$, on obtient la forme parfaite φ.

2.) Nous avons vu au n° 42 que la forme parfaite $\varphi_1 - \varrho\, x_1 x_3$ est déterminée par la valeur $\varrho = 1$ du paramètre ϱ dans le cas $n = 5$. On obtient la forme

(2.) $$\varphi_1' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_4 + x_1x_5 + \cdots + x_4x_5$$

qui sera transformée à l'aide de la substitution

$$x_1 = -x_2', \; x_2 = x_1' - x_2', \; x_3 = x_3', \; x_4 = x_2 + x_4', \; x_5 = x_2' + x_5'$$

en une forme parfaite φ_1.

3.) Dans la forme $\varphi_1 + \varrho(x_1x_2 - x_4x_5)$, on posera $\varrho = 1$ et on obtiendra la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_5$$

qui est évidemment équivalente à la forme φ_1.

4.) Dans la forme $\varphi_1 + \varrho(x_1x_2 - x_3x_5 - x_4x_5)$, on posera $\varrho = 1$ et on obtiendra la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_5$$

qui est évidemment équivalente à la forme parfaite (2.).

5.) Il ne reste qu' à déterminer la forme parfaite:

(3.) $$\varphi_1 + \varrho(x_1x_2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5).$$

En effectuant la transformation à l'aide de la substitution

(4.) $$-x_1 + x_2 = x_1', \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_2', \; x_3 = x_3', \; x_4 = x_4', \; x_5 = x_5'$$

de la forme

$$2\varphi_1 + 2\varrho(x_1x_2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5),$$

on obtient la forme

(5.) $$\begin{aligned} &x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 + x_5'^2 + \frac{\varrho}{2}[-x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 + x_5'^2 \\ &- 2x_2'x_3' - 2x_2'x_4' - 2x_2'x_5' - 2x_3'x_4' - 2x_3'x_5' - 2x_4'x_5']. \end{aligned}$$

En vertu de (4.) les variables entières $x_1', x_2', x_3', x_4', x_5'$ vérifient la congruence

(6.) $$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' \equiv 0 \pmod 2.$$

En appliquant à la forme (5.) la méthode exposée au n° 2, on déterminera la valeur de la limite supérieure $R > 0$ des valeurs $\frac{\varrho}{2}$ à l'aide des équations

$$\xi_1 - R\xi_1 = 0, \; \xi_2 + R(\xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5) = 0, \; \xi_3 + R(-\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 - \xi_5) = 0,$$
$$\xi_4 + R(-\xi_2 - \xi_3 + \xi_4 - \xi_5) = 0, \; \xi_5 + R(-\xi_2 - \xi_3 - \xi_4 + \xi_5) = 0.$$

Il en résulte que

$$\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5,$$

et on obtient deux équations

$$\xi_1 (1 - R) = 0 \text{ et } \xi_2 (1 - 2R) = 0,$$

donc

$$R = \frac{1}{2}.$$

En posant

(7.) $$x'_1 = 0,\ x'_2 = 1,\ x'_3 = 1,\ x'_4 = 1,\ x'_5 = 1,$$

on satisfera à la condition (6.) et on aura la valeur $4 - 4\varrho$ de la forme (5.).

En faisant

$$4 - 4\varrho = 2,$$

on obtient

$$\varrho = \frac{1}{2}.$$

Il s'en suit que la forme quadratique positive

(8.) $$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_5'^2 + \frac{1}{4}[-x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 + x_5'^2 - 2x'_2 x'_3 - \cdots - 2x'_4 x'_5]$$

aura une valeur 2 correspondant au système (7.).

En vertu de ce qui a été dit au n° 23, la plus petite valeur de la forme (8.) correspondra à un système $(l_1, l_2, \cdots l_5)$ vérifiant l'inégalité

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 \leq 2\,\frac{R}{R - \frac{1}{4}} \text{ où } R = \frac{1}{2}.$$

On obtient l'inégalité

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 \leq 4.$$

Il est aisé à démontrer que le système (7.) est le seul vérifiant cette inégalité à condition (6.), les systèmes qui vérifient l'inégalité

$$-x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 + x_5'^2 - 2x'_2 x'_3 - 2x'_2 x'_4 - 2x'_2 x'_5 - 2x'_3 x'_4 - 2x'_3 x'_5 - 2x'_4 x'_5 \geq 0$$

étant exclus. En faisant $\varrho = \frac{1}{2}$ dans la forme (3.), on obtient la forme parfaite

$$\varphi_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 + \frac{1}{2}x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_2 x_5 + \frac{1}{2}x_3 x_4 + \frac{1}{2}x_3 x_5 + \frac{1}{2}x_4 x_5,$$

$$D = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{1}{2^5}.$$

Le domaine correspondant R_2 est composé des formes

$$\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \cdots + \varrho_5 x_5^2 + \varrho_6 (x_1 - x_3)^2 + \cdots + \varrho_{11} (x_2 - x_5)^2$$
$$+ \varrho_{12} (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 + \varrho_{13} (x_1 + x_2 - x_3 - x_5)^2 + \varrho_{14} (x_1 + x_2 - x_4 - x_5)^2$$
$$+ \varrho_{15} (- x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2.$$

Le nombre des paramètres $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{15}$ étant égal au nombre des dimensions du domaine R_2, on déterminera sans peine 15 inégalités qui définissent le domaine R_2.

45. Nous avons démontré que toutes les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_1, sont équivalentes aux formes parfaites φ, φ_1 et φ_2.

Cherchons les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_2.

A cet effet observons, en premier lieu, que la forme parfaite φ_1 est contiguë à la forme parfaite φ_2, puis observons que toutes les formes parfaites contiguës à la forme φ_2 sont équivalentes.

Pour le démontrer, examinons toutes les faces à 14 dimensions du domaine R_2.

Le domaine R_2 est caractérisé par 15 formes quadratiques

$$9.) \quad \begin{cases} x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, \quad (x_1-x_3)^2, \quad (x_1-x_4)^2, \quad (x_1-x_5)^2, \quad (x_2-x_3)^2, \quad (x_2-x_4)^2, \\ (x_2-x_5)^2, \quad (x_1+x_2-x_3-x_4)^2, \quad (x_1+x_2-x_3-x_5)^2, \quad (x_1+x_2-x_4-x_5)^2, \\ (-x_1-x_2+x_3+x_4+x_5)^2. \end{cases}$$

Chaque face à 14 dimensions du domaine R_2 en possède 14, et la forme qui reste peut être appelée forme opposée à la face.

On en conclut que chaque face est bien déterminée par la face opposée.

Pour que les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_2 soient équivalentes, il faut et il suffit que toutes les faces du domaine R_2 puissent être transformées l'une en l'autre à l'aide de substitutions qui ne changent pas le domaine R_2 ou, ce qui revient au même, que les formes (9.) puissent être transformées deux à deux à l'aide de substitutions qui ne changent pas le domaine R_2.

Il serait aisé à écrire toutes ces substitutions, mais on procédera d'une autre manière, plus expéditive.

Observons que la face P appartenant aux domaines R_1 et R_2 est caractérisée par toutes les formes (9.), la forme $(-x_1-x_2+x_3+x_4+x_5)^2$ étant exclue.

A l'aide de la substitution adjointe à la substitution (4.), on remplacera les formes (9.) par les formes suivantes:

$$(10.)\quad \begin{matrix}(x_1' \pm x_2')^2, & (x_1' \pm x_3')^2, & (x_1' \pm x_4')^2, & (x_1' \pm x_5')^2, & (x_2' + x_3')^2, & (x_2' + x_4')^2,\\ (x_2' + x_5')^2, & (x_3' + x_4')^2, & (x_3' + x_4')^2, & (x_4' + x_5')^2, & (x_2' + x_3' + x_4' + x_5')^2.\end{matrix}$$

En changeant le signe de x_1' et en permutant les variables x_2', x_3', x_4', x_5', on transformera en soi-même les formes (10.), et la forme $(x_2' + x_3' + x_4' + x_5')^2$ ne sera pas changée.

A chaque substitution pareille correspond une substitution qui transforme en soi-même le domaine R_2 et la face P du domaine R_2, et ne change pas la forme $(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2$.

En changeant le signe de x_1' et en permutant x_2', x_3', x_4', x_5', on transformera la forme $(x_1' + x_2')^2$ en des formes

$$(x_1' \pm x_2')^2, \quad (x_1' \pm x_3')^2, \quad (x_1' \pm x_4')^2, \quad (x_1' \pm x_5')^2,$$

et on transformera la forme $(x_2' + x_3')^2$ en des formes

$$(x_2' + x_3')^2, \quad (x_2' + x_4')^2, \quad (x_2' + x_5')^2, \quad (x_3' + x_4')^2, \quad (x_3' + x_5')^2, \quad (x_4' + x_5')^2.$$

Donc, les formes

$$(11.)\qquad (x_1' + x_2')^2, \quad (x_2' + x_3')^2, \quad (x_2' + x_3' + x_4' + x_5')^2$$

restent seules à examiner.

En revenant aux formes (9.), on obtient les formes correspondant aux formes (11.)

$$(12.)\qquad x_2^2, \quad x_3^2, \quad (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2.$$

Il est démontré que toutes les formes (9.) peuvent être transformées en des formes (12.) à l'aide de substitutions qui ne changent pas le domaine R_2.

A l'aide des substitutions

$$x_1 = x_2' - x_5', \quad x_2 = x_3', \quad x_3 = x_2', \quad x_4 = x_1' + x_2' - x_4' - x_5', \quad x_5 = -x_1' + x_3'$$

et

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = -x_1' - x_2' + x_3' + x_4' + x_5', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = x_4', \quad x_5 = x_5',$$

on transformera le domaine R_2 en soi-même, et la forme x_2^2 sera transformée en des formes x_3^2 et $(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2$.

Nous avons démontré que toutes les faces du domaine R_2 sont équivalentes. Il en résulte, comme nous l'avons vu, que toutes les formes parfaites contiguës à la forme parfaite φ_2 sont équivalentes à la forme parfaite φ_1.

On en conclut que toutes les formes parfaites à cinq variables composent trois classes différentes représentées par les formes parfaites φ, φ_1 et φ_2.

L'ensemble de domaines (R) peut être partagé en trois classes, aussi, représentées par les domaines R, R_1 et R_2.

Fin du premier Mémoire.

Über die Elimination von Variabeln zwischen den *Lagrange*schen Gleichungen der Dynamik.

Von Herrn *Leo Koenigsberger* in Heidelberg.

Die Frage, mit welcher sich die vorliegende Untersuchung beschäftigt, kann im wesentlichen dadurch charakterisiert werden, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt werden sollen, unter denen die auf algebraischem Wege mittels Differentiation oder durch unmittelbar ersichtliche Integrationen ausgeführte Elimination gewisser Parameter aus *Lagrange*schen Gleichungen, welche einem allgemeinen kinetischen Potentiale erster Ordnung oder speziell einem solchen wägbarer Massen zugehören, wiederum auf *Lagrange*sche Gleichungen führt, die einem kinetischen Potentiale erster oder höherer Ordnung entsprechen, also einem Probleme mit weniger Parametern angehören, welche entweder wieder mechanischen Kräften oder Kräften höherer Ordnung unterworfen sind.

Bevor ich nun dieses allgemeine und, wie ich glaube, für die Anwendungen nicht ganz uninteressante Problem angreife, muß ich zu den bekannten Eigenschaften kinetischer Potentiale beliebiger Ordnung noch einige Bemerkungen und Ergänzungen hinzufügen.

§ 1.

Nehmen wir an, daß die Bewegung eines Systems von n Punkten mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i durch eine Gleichung von der Form

$$\sum_{i=1}^{n}\Big\{\Big(-\frac{\partial H}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i'}-\cdots+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}}-X_i\Big)\delta x_i+\Big(-\frac{\partial H}{\partial y_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y_i'}$$
$$-\cdots+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}}-Y_i\Big)\delta y_i+\Big(-\frac{\partial H}{\partial z_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_i'}-\cdots$$
$$+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{dz_i^{(\nu)}}-Z_i\Big)\delta z_i\Big\}=0$$

beschrieben werde*), worin t die Zeit, X_i, Y_i, Z_i Funktionen von t, den Koordinaten und deren Ableitungen bedeuten, welche die nach den Koordinatenachsen wirkenden Komponenten der äußeren, dem Gesetze von der Summation der Arbeit unterworfenen Kräfte darstellen, und $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ alle mit den, den Koordinaten auferlegten Beschränkungen verträglichen, virtuellen Verrückungen bezeichnen, so wird H, welches eine beliebig gegebene Funktion von t, den Koordinaten und deren Ableitungen bis zur ν-ten Ordnung hin sein soll, das kinetische Potential ν-ter Ordnung genannt.

Wird als Maß einer jeden nach einer Graden L wirkenden Kraft für die Strecken l auf dieser Linie der Ausdruck

$$-\frac{\partial T}{\partial l}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'}-\cdots+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial_i T}{\partial l^{(\nu)}}$$

zugrunde gelegt, worin T im allgemeinen eine beliebige Funktion von $t, l, l', \ldots l^{(\nu)}$ sein kann, welche, wenn nur Kräfte in Betracht kommen, für welche der Satz von der Summation der Arbeit Gültigkeit hat, eine homogene Funktion 2. Grades von $l, l', \ldots l^{(\nu)}$ sein muß, wird ferner angenommen, daß die inneren Kräfte des Systems eine Kräftefunktion U im erweiterten Sinne besitzen, oder daß die auf den Punkt x_i, y_i, z_i wirkenden Kraftkomponenten derselben durch die Ausdrücke

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial x_i'}-\cdots+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial x_i^{(\nu)}},\quad -\frac{\partial U}{\partial y_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial y_i'}-\cdots+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial y^{(\nu)}},$$
$$-\frac{\partial U}{\partial z_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial z_i'}-\cdots+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial z_i^{(\nu)}}$$

dargestellt werden, dann wird

$$H=-T-U$$

sein, und T als Analogon zur lebendigen Kraft in der Mechanik wägbarer Massen die aktuelle, $-U$ die potentielle Energie darstellen, wobei im allgemeinen jedoch eine Trennung dieser beiden Energieen nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

Sind die $3n$ Koordinaten durch die λ Bedingungsgleichungen

$$f_1(t, x_i, y_i, z_i)=0,\quad f_2(t, x_i, y_i, z_i)=0,\quad \ldots f_\lambda(t, x_i, y_i, z_i)=0$$

*) s. meine Note „Über die Grundlagen der Mechanik“ in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1906.

mit einander verbunden, vermöge deren sich die $3n$ Koordinaten durch $3n-\lambda=\mu$ von einander unabhängige Parameter in der Form ergeben mögen

$$x_i=\varphi_i(t,p_1,p_2,\cdots p_\mu),\quad y_i=\psi_i(t,p_1,p_2,\cdots p_\mu),\quad z_i=\chi_i(t,p_1,p_2,\cdots p_\mu),$$

so wird man zur Transformation der Bewegungsgleichungen in die Variabeln $p_1,p_2,\cdots p_\mu$ des folgenden wegen am zweckmäßigsten dieselben in die Form setzen

$$-\delta\int_t^{t_1} H dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)\,dt,$$

wobei angenommen wird, daß die Variationen der Koordinaten und deren Ableitungen bis zur $(\nu-1)$-ten Ordnung hin an den Grenzen t_0 und t_1 verschwinden.

Werden nun die durch Substitution der Parameter sich ergebenden Ausdrücke durch Klammern unterschieden, und

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i)\frac{\partial x_i}{\partial p_s}+(Y_i)\frac{\partial y_i}{\partial p_s}+(Z_i)\frac{\partial z_i}{\partial p_s}\right\}=P_s \qquad (s=1,2,\ldots\mu)$$

gesetzt, so folgt

$$-\delta\int_{t_0}^{t_1}(H)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{\mu}P_s\delta p_s\,dt,$$

und hieraus in bekannter Weise die μ erweiterten *Lagrange*schen Differentialgleichungen

$$-\frac{(\partial H)}{\partial p_s}+\frac{d}{dt}\frac{(\partial H)}{\partial p_s'}-\cdots+(-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial(H)}{\partial p_s^{(\nu)}}=P_s. \qquad (s=1,2,\ldots\mu)$$

Dieselben können nur dann durch das erweiterte *Hamilton*sche Prinzip ersetzt werden, wenn die längs der p-Koordinaten genommenen äußeren Kräfte P_s ein kinetisches Potential Q besitzen, also

$$P_s=-\frac{\partial Q}{\partial p_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial p_s'}-\cdots+(-1)^{\varrho+1}\frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\frac{\partial Q}{\partial p_s^{(\varrho)}} \qquad (s=1,2,\ldots\mu)$$

ist, wonach dann die obige Gleichung die Form

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\big((H)-Q\big)dt=0$$

annehmen wird, und dies würde in dem besonders wichtigen Falle eintreten, wenn die P_s Konstanten oder reine Funktionen von t wären, also die Variationsgleichung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big((H) + \sum_{s=1}^{\mu} P_s p_s \Big) dt = 0$$

lautete, oder auch ohne weitere Bedingung, wenn $s = 1$ und P eine beliebige Funktion von t und p ist, indem dann die Bewegungsgleichung durch

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big((H) + \int P dp \Big) dt = 0$$

ersetzt werden kann.

Ist nun H ein kinetisches Potential erster Ordnung, so lauten die *Lagrange*schen Gleichungen

$$(1.) \qquad -\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} = P_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

worin von nun an H ohne Klammern als Funktion von $t, p_1, \ldots p_\mu, p'_1, \ldots p'_\mu$ aufgefaßt wird und in der Mechanik wägbarer Massen durch Transformation des Ausdruckes

$$H = -T - U$$

entstanden ist, wenn

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

die lebendige Kraft des Systems, und U die nur von t und den Koordinaten abhängige Kräftefunktion der inneren Kräfte bedeutet; die äußeren Kräfte P_s sollen nur von t und den Parametern, nicht von deren Ableitungen abhängen.

In der Mechanik wägbarer Massen wird, wie aus den oben bezeichneten Substitutionsgleichungen und deren nach t genommenen Differentialquotienten

$$x'_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s} p'_s, \qquad y'_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\mu} \frac{\partial \psi_i}{\partial p_s} p'_s, \qquad z'_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\mu} \frac{\partial \chi_i}{\partial p_s} p'_s$$

hervorgeht, H eine Funktion 2. Grades der Ableitungen der Parameter von der Form sein

$$(2.)\quad H=\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\mu}\omega_{\alpha\beta}(t,p_1,\dots p_\mu)p'_\alpha p'_\beta+\sum_{\alpha=1}^{\mu}\omega_\alpha(t,p_1,\dots p_\mu)p'_\alpha+\omega(t,p_1,\dots p_\mu),$$

worin

$$\omega_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\beta}+\frac{\partial\psi_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial p_\beta}+\frac{\partial\chi_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\chi_i}{\partial p_\beta}\Big)=\omega_{\beta\alpha},$$

$$\omega_\alpha=-\sum_{i=1}^{n}m_i\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\frac{\partial\psi_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\frac{\partial\chi_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\chi_i}{\partial t}\Big),$$

$$\omega=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\chi_i}{\partial t}\Big)^2\right)-U(t,\varphi_i,\psi_i,\chi_i)$$

ist, während, wenn die Substitutionsgleichungen t nicht explizite enthalten, das kinetische Potential H von U abgesehen eine homogene Funktion 2. Grades in den Ableitungen der Parameter ist, indem die ω_α und der erste Teil von ω verschwinden. Umgekehrt wird jedes *Lagrange*sche Differentialgleichungssystem, für welches das kinetische Potential H die Form (2.) hat, auch stets ein Bewegungsproblem in der Mechanik wägbarer Massen definieren, wenn man nur, wie leicht zu sehen, die Anzahl n der Punkte der Bedingung unterwirft, daß

$$3n\geqq\frac{\mu(\mu+3)}{2}+1$$

ist.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß, wenn die Zeit t weder in den Bedingungsgleichungen noch in der Kräftefunktion und den Ausdrücken für die äußeren Kräfte explizite vorkommt, auch die *Lagrange*schen Gleichungen dieselbe nicht explizite enthalten werden, doch kann letzteres auch eintreten, ohne daß jene Voraussetzungen erfüllt sind. Die Unabhängigkeit der Gleichungen (1.) von t erfordert nämlich nur die Identität der Gleichung

$$(3.)\qquad -\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\,\partial t}+\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 H}{\partial p'_s\,\partial t}=\frac{\partial P_s}{\partial t}\qquad(s=1,2,\dots\mu)$$

und somit zunächst wegen

$$\frac{\partial^3 H}{\partial p'_s\,\partial p'_\sigma\,\partial t}=0\qquad(s,\sigma=1,2,\dots\mu)$$

für das kinetische Potential nach (2.) die Form

$$H=\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\mu}\omega_{\alpha\beta}(p_1,\dots p_\mu)p'_\alpha p'_\beta+\sum_{\alpha=1}^{\mu}\omega_\alpha(t,p_1,\dots p_\mu)p'_\alpha+\omega(t,p_1,\dots p_\mu),$$

welche in (3.) eingesetzt die Funktionen ω_α und ω den Bedingungen unterwirft, daß

$$\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial p_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial p_\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega}{\partial p_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial t} + P_s$$

die Variable t nicht explizite enthalten dürfen, woraus sich unmittelbar die in den Funktionen $\varphi_i, \psi_i, \chi_i$ ausdrückbaren Bedingungen ergeben.

§ 2.

Seien nun μ in den zweiten Ableitungen der Parameter $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ lineare Differentialgleichungen gegeben, so wäre zunächst die Frage zu beantworten, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, daß diese sich in die durch (1.) bestimmte Form der *Lagrange*schen Gleichungen setzen lassen, deren rechte Seiten wir gleich Null annehmen dürfen, da, wie oben bemerkt, unter der Annahme, daß die äußeren Kräfte Konstanten oder reine Funktionen von t sind, das kinetische Potential erster Ordnung H nur durch $H - \sum_{s=1}^{\mu} P_s p_s$ ersetzt zu werden braucht. Diese Bedingungen werden aber durch die bekannten Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials erster Ordnung charakterisiert, welche aussagen, daß, wenn

$$(4.) \qquad N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \ \ldots \ N_\mu = 0$$

die Form der linken Seiten von (1.) haben sollen, die Gleichungen

$$(5.) \quad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p'_\lambda} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p''_\lambda} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa}, \quad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p'_\lambda} - 2\frac{d}{dt}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p''_\lambda} = -\frac{\partial N_\lambda}{\partial p'_\varkappa},$$
$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p''_\lambda} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p''_\varkappa} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots \mu)$$

identisch erfüllt sein müssen. Wird diesen Bedingungen jedoch nicht genügt, so bleibt noch übrig zu entscheiden, ob die in p''_1, p''_2, p''_μ linearen Gleichungen (4.) nicht etwa einem solchen *Lagrange*schen Differentialgleichungssysteme äquivalent sein können, oder ob μ^2 von $t, p_1, \ldots p_\mu, p'_1, \ldots p'_\mu$ abhängige Multiplikatoren $m_{\alpha\beta}$ existieren, für welche die Ausdrücke

$$M_r = m_{r1} N_1 + m_{r2} N_2 + \cdots + m_{r\mu} N_\mu \qquad (r = 1, 2, \ldots \mu)$$

jenen Existenzbedingungen genügen oder die Form der linken Seiten der Gleichungen (1.) besitzen, wenn die Determinante der $m_{\alpha\beta}$ von Null verschieden vorausgesetzt wird.

Um zunächst diese Untersuchung für einen Parameter durchzuführen, würde man für eine Differentialgleichung

$$f(t,p,p')p'' + f_1(t,p,p') = 0 \tag{6.}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dieselbe die Gestalt einer *Lagrange*schen Gleichung hat, aus (5.) in der Form erhalten

$$\frac{\partial f_1}{\partial p'} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p}p', \tag{7.}$$

so daß, wenn diese identische Gleichung nicht befriedigt ist, die Frage entsteht, ob ein Multiplikator m der Gleichung (6.) als Funktion von t, p, p' existiert, welcher die *Lagrange*sche Form in (6.) herstellt oder der Identität

$$\frac{\partial(mf_1)}{\partial p'} \equiv \frac{\partial(mf)}{\partial t} + \frac{\partial(mf)}{\partial p}p'$$

Genüge leistet, und es ergibt sich somit, daß jede Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$f_1\frac{\partial m}{\partial p'} - f\left(\frac{\partial m}{\partial t} + p'\frac{\partial m}{\partial p}\right) = -m\left(\frac{\partial f_1}{\partial p'} - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial p}p'\right) \tag{8.}$$

mit der abhängigen Variabeln m und den drei unabhängigen Variabeln t, p, p' als Multiplikator der Gleichung (6.) derselben die *Lagrange*sche Form erteilen wird, was sich aus der gewöhnlichen Multiplikatortheorie für die Zurückführung eines Ausdruckes auf eine vollständige Variation ebenso einfach ergibt

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\left(2tp' + \frac{1}{2}t^2\right)p'' + \frac{1}{2}\left(p'^2 + tp' - p\right) = 0,$$

welche der Gleichung (7.) nicht Genüge leistet, durch das partikuläre Integral

$$m = p'^2 + tp' - p$$

der zugehörigen partiellen Differentialgleichung (8.) als Multiplikator in

$$\left(p'^2 + tp' - p\right)\left(2tp' + \frac{1}{2}t^2\right)p'' + \frac{1}{2}\left(p'^2 + tp' - p\right)^2 = 0,$$

übergehen und sich in die Form

$$-\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'}=0$$

setzen lassen für das kinetische Potential erster Ordnung

$$H=\frac{1}{10}tp'^5+\frac{5}{24}t^2p'^4+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}t^3-2tp\right)p'^3-\frac{1}{4}t^2pp'^2+\frac{1}{2}tp^2p'.$$

Da aber durch Multiplikation von (6.) mit m dieser Gleichung im allgemeinen neue Integrale zugeführt werden, so sollen, um eine der früheren äquivalente Gleichung zu erhalten, nur solche Multiplikatoren in Frage kommen, für welche die Differentialgleichung

$$m\,(t,p,p')=0 \tag{9.}$$

nur Integrale besitzt, welche schon der Gleichung (6.) selbst angehören. Da aber m für jeden Zusammenhang von t, p, p' der partiellen Differentialgleichung (8.) identisch genügt, so wird jedes Integral von (9.) auch die Gleichung

$$f_1\frac{\partial m}{\partial p'}-f\left(\frac{\partial m}{\partial t}+p'\frac{\partial m}{\partial p}\right)=0$$

befriedigen, und daher auch, da aus (9.)

$$p''\frac{\partial m}{\partial p'}+\left(\frac{\partial m}{\partial t}+p'\frac{\partial m}{\partial p}\right)=0$$

folgt, der Gleichung

$$\frac{\partial m}{\partial p'}(fp''+f_1)=0$$

Genüge leisten, und somit nur dann nicht ein Integral von (6.) zu sein bräuchen, wenn das Integral von (7.) auch $\frac{\partial m}{\partial p'}$ zu Null macht, oder im allgemeinen ein singuläres Integral von (6.) ist — es werden daher nur solche Multiplikatoren der Differentialgleichung (6.) eine der früheren äquivalente Form geben, welche gleich Null gesetzt eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung definieren, welche kein singuläres Integral besitzt.

In dem obigen Beispiel würde die Differentialgleichung

$$m = p'^2 + tp' - p = 0$$

das singuläre Integral $p = -\frac{t^2}{4}$ besitzen, welches der vorgelegten Differentialgleichung nicht genügt, und somit die erhaltene *Lagrange*sche Gleichung dieser nicht äquivalent sein.

Da nun aber umgekehrt, wenn sich aus den beiden Gleichungen

$$(10.) \qquad m(t, p, q) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial m}{\partial q} = 0$$

p und q als Funktionen von t bestimmen lassen, dieselben Funktionen der Gleichung (8.) zufolge auch

$$f(t, p, q)\left(\frac{\partial m}{\partial t} + q\frac{\partial m}{\partial p}\right) = 0 \quad \text{oder im allgemeinen auch} \quad \frac{\partial m}{\partial t} + q\frac{\partial m}{\partial p} = 0$$

nach sich ziehen, und somit, wie aus Vergleichung dieser Beziehung mit der nach t differentiierten Gleichung $m(t, p, q) = 0$ folgt, sich $q = p'$ ergibt, so wird der gleich Null gesetzte Multiplikator im allgemeinen stets ein singuläres Integral besitzen, wenn es nicht ein partikuläres ist, und daher die so entstandene *Lagrange*sche Gleichung im allgemeinen nur dann der gegebenen Differentialgleichung äquivalent sein, wenn sich aus den Gleichungen (10.) p und q nicht als Funktionen von t darstellen lassen.

So wird die Differentialgleichung

$$p'' + p' = 0,$$

welche selbst nicht die *Lagrange*sche Form besitzt, durch den Multiplikator

$$m = p' e^{2t} + (p + p') e^t,$$

welcher ein Integral der zugehörigen partiellen Differentialgleichung (8.) ist, die *Lagrange*sche Form für das kinetische Potential

$$H = \frac{1}{6}(e^{2t} + e^t) p'^3 + p p'^2 e^t$$

annehmen, und diese der gegebenen Differentialgleichung äquivalent sein, weil $m = 0$ kein singuläres Integral besitzt; in der Tat wird die letztere

Gleichung nach t differentiiert für alle ihre Integrale die Beziehung

$$(e^t+1)(p''+p')=0$$

liefern, und also neue Integrale der gegebenen Differentialgleichung nicht zuführen.

Um die eben behandelte Frage des folgenden wegen speziell für ein kinetisches Potential wägbarer Massen, welches bekanntlich die Form hat

$$H=\omega_1(t,p)p'^2+\omega_2(t,p)p'+\omega(t,p) \tag{11.}$$

zu erörtern, und also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, daß

$$fp''+f_1\equiv-\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'}\equiv-\frac{\partial\omega_1}{\partial p}p'^2-\frac{\partial\omega_2}{\partial p}p'-\frac{\partial\omega}{\partial p}+\frac{d}{dt}(2\omega_1p'+\omega_2)$$

wird, so ist zunächst ersichtlich, daß sich als notwendig zu erfüllende identische Beziehungen

$$\frac{\partial f}{\partial p'}=0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial p'}=p'\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{12.}$$

ergeben. Daß diese Bedingungen aber auch die hinreichenden sind, folgt daraus, daß, wenn man der ersten Gleichung (12.) gemäß

$$f=2\omega_1(t,p)$$

setzt, die zweite derselben

$$f_1=\frac{\partial\omega_1}{\partial p}p'^2+2p'\frac{\partial\omega}{\partial t}+\Omega(t,p)$$

ergibt, und daher nur Ω, ω und ω_1 der Beziehung zu unterwerfen sind

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial t}-\frac{\partial\omega}{\partial p}=\Omega(t,p),$$

damit (11.) das kinetische Potential liefert.

Hat nun die vorgelegte Differentialgleichung nicht die *Lagrange*sche Form, und soll sie wieder durch einen Multiplikator $m(t,p,p')$ in eine solche gesetzt werden können, so verlangen die Gleichungen (12.), daß

$$\frac{\partial(mf)}{\partial p'}=0\quad\text{oder}\quad m(t,p,p')=\frac{\lambda(t,p)}{f(t,p,p')} \tag{13.}$$

und

$$(14.)\quad \frac{\partial\left(\lambda\frac{f_1}{f}\right)}{\partial p'}=p'\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\frac{\partial\lambda}{\partial t}\quad\text{oder}\quad \frac{f_1}{f}=\Omega_1(t,p)\,p'^2+\Omega_2(t,p)\,p'+\Omega(t,p)$$

ist, worin die Funktionen Ω_1, Ω_2, λ von t und p den Bedingungen unterliegen

$$(15.)\qquad 2\,\Omega_1\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial p},\quad \Omega_2\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial t},$$

und damit λ bestimmbar ist,

$$(16.)\qquad \frac{\partial\Omega_2}{\partial p}=2\,\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}$$

sein muß. *Es wird somit jede in p'' lineare Differentialgleichung* (6.), *in welcher* $\frac{f_1}{f}$ *eine quadratische Funktion von p' ist, deren Koeffizienten der Beziehung* (16.) *unterliegen, und nur eine solche durch Multiplikation mit einem Faktor m der angegebenen Form* (13.) *in die Lagrangesche Form für ein kinetisches Potential wägbarer Massen transformiert werden.*

Soll nun die so entstehende Differentialgleichung

$$\frac{\lambda}{f}(f\,p''+f_1)=\lambda\,(p''+\Omega_1 p'^2+\Omega_2 p'+\Omega)=0$$

der gegebenen

$$f\,p''+f_1=f\,(p''+\Omega_1 p'^2+\Omega_2 p'+\Omega)=0$$

äquivalent sein, so werden wieder λ und f für dieselben Funktionen p von t Null oder unendlich sein, oder nach (15.) die Lösungen von $f=0$ oder $f=\infty$ das Integral $\int\Omega_1\,dp$ unendlich groß machen müssen.

Während z. B. die Differentialgleichung

$$p''+a\,p=0$$

schon an sich die *Lagrange*sche Form für das kinetische Potential

$$H=\frac{1}{2}p'^2-\frac{a}{2}p^2$$

besitzt, wird die Gleichung

$$p''+a\,p'+b\,p=0,$$

in welcher a und b Konstanten bedeuten, und welche selbst nicht die *Lagrange*sche Form hat, nach (15.) für den Multiplikator den Wert e^{at} ergeben, und in der Tat hat die Gleichung

$$e^{at}(p'' + ap' + bp) = 0,$$

welche neue Integrale nicht liefert, die gesuchte Form für das kinetische Potential wägbarer Massen

$$H = \frac{1}{2} e^{at} p'^2 + \frac{b}{a} e^{at} p p'.$$

Ebenso wird die Differentialgleichung

$$\frac{p}{pp' + 1} p'' + (pt + 1) p' + p^2 - \frac{1}{p} + t^2 = 0,$$

für welche $\frac{f_1}{f}$ wieder eine quadratische Funktion von p' ist, mit dem aus den Gleichungen (13.) und (15.) hergeleiteten Multiplikator

$$m = \frac{1}{p}(pp' + 1)\, e^{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 2p + tp^2}$$

versehen die *Lagrange*sche Form für das kinetische Potential

$$H = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 2p + tp^2} + p' \int e^{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 2p + tp^2} \left(p - \frac{1}{p^2} + \frac{t^2}{p}\right) dt$$

annehmem.

Wesentlich andere Resultate werden sich für die analoge Untersuchung der von kinetischen Potentialen wägbarer Massen beschriebenen Bewegungen ergeben, wenn das Problem mehr als *einen* Parameter einschließt, und es wird sich unmittelbar zeigen, daß es genügt, nur den Fall von zwei Parametern in Betracht zu ziehen.

Sollen zwei in p_1'' und p_2'' lineare Differentialgleichungen

$$(17.)\quad \begin{aligned} N_1 &= f_{11}(t, p_1, p_2, p_1', p_2')\, p'' + f_{12}(t, p_1, p_2, p_1', p_2')\, p_2'' + F_1(t, p_1, p_2, p_1', p_2') = 0, \\ N_2 &= f_{21}(t, p_1, p_2, p_1', p_2')\, p_1'' + f_{22}(t, p_1, p_2, p_1', p_2')\, p_2'' + F_2(t, p_1, p_2, p_1', p_2') = 0 \end{aligned}$$

die *Lagrange*sche Form

$$-\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = P_1, \quad -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'} = P_2$$

für ein kinetisches Potential wägbarer Massen

$$(18.)\quad H=\omega_{11}(t,p_1,p_2)\,p_1'^2+2\omega_{12}(t,p_1,p_2)\,p_1'p_2'+\omega_{22}(t,p_1,p_2)\,p_2'^2 + \omega_1(t,p_1,p_2)\,p_1'+\omega_2(t,p_1,p_2)\,p_2'+\omega(t,p_1,p_2)$$

besitzen, worin P_1 und P_2 Funktionen von t, p_1, p_2 sein sollen, so ergeben sich unmittelbar durch Vergleichung für die Koeffizienten von N_1 und N_2 die notwendigen Bedingungen

$$(19.)\quad \frac{\partial f_{11}}{\partial p_1'}=0,\ \frac{\partial f_{11}}{\partial p_2'}=0,\ \frac{\partial f_{12}}{\partial p_1'}=0,\ \frac{\partial f_{12}}{\partial p_2'}=0,\ \frac{\partial f_{22}}{\partial p_1'}=0,\ \frac{\partial f_{22}}{\partial p_2'}=0,\ f_{12}=f_{21},$$

$$(20.)\quad \begin{cases} F_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f_{11}}{\partial p_1}p_1'^2+\frac{\partial f_{11}}{\partial p_2}p_1'p_2'+\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial f_{22}}{\partial p_1}+\frac{\partial f_{12}}{\partial p_2}\right)p_2'^2+\frac{1}{2}p_1'\frac{\partial f_{11}}{\partial t}+ \\ \qquad p_2'\left(-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_1}+\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial t}\right)-\frac{\partial \omega}{\partial p_1}+\frac{\partial \omega_1}{\partial t}-P_1, \\ F_2=\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial f_{11}}{\partial p_2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial p_1}\right)p_1'^2+\frac{\partial f_{22}}{\partial p_1}p_1''p_2'+\frac{1}{2}\frac{\partial f_{22}}{\partial p_2}p_2'^2+ \\ \qquad p_1'\left(-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}+\frac{\partial \omega_2}{\partial p_1}+\frac{\partial f_{12}}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}p_2'\frac{\partial f_{22}}{\partial t}-\frac{\partial \omega}{\partial p_2}+\frac{\partial \omega_2}{\partial t}-P_2, \end{cases}$$

somit F_1 und F_2 als ganze Funktionen 2. Grades von p_1' und p_2'.

Durch Differentiation dieser Gleichungen folgt aber unmittelbar

$$(21.)\quad \frac{\partial F_1}{\partial p_1'}=\frac{\partial f_{11}}{\partial p_1}p_1'+\frac{\partial f_{11}}{\partial p_2}p_2'+\frac{1}{2}\frac{\partial f_{11}}{\partial t},\qquad \frac{\partial F_2}{\partial p_2'}=\frac{\partial f_{22}}{\partial p_1}p_1'+\frac{\partial f_{22}}{\partial p_2}p_2'+\frac{1}{2}\frac{\partial f_{22}}{\partial t},$$

$$(22.)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_2'}+\frac{\partial F_2}{\partial p_1'}\right)=\frac{\partial f_{12}}{\partial p_1}p_1'+\frac{\partial f_{12}}{\partial p_2}p_2'+\frac{\partial f_{12}}{\partial t}=\frac{df_{12}}{dt},$$

während sich für die Koeffizienten der in p_1' und p_2' linearen Teile von F_1 und F_2

$$\varphi_1p_1'+\varphi_2p_2'+\varphi_3,\quad \psi_2p_1'+\psi_1p_2'+\psi_3$$

die Beziehung ergibt

$$(23.)\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_2}-\frac{\partial \psi_3}{\partial p_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}-\frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right)-\frac{\partial P_1}{\partial p_2}+\frac{\partial P_2}{\partial p_1},$$

und es soll nun gezeigt werden, daß die eben gefundenen Bedingungen (19.), (21.), (22.) und (23.) auch die für die *Lagrange*sche Form der Differentialgleichungen (17.) hinreichenden sind.

Setzt man nämlich den Gleichungen (19.) gemäß

$$f_{11}=2\omega_{11}(t,p_1,p_2),\quad f_{12}=f_{21}=2\omega_{12}(t,p_1,p_2),\quad f_{22}=2\omega_{22}(t,p_1,p_2),$$

so werden F_1 und F_2 den Gleichungen (21.) zufolge die Form haben

$$F_1=\frac{\partial\omega_{11}}{\partial p_1}p_1'^2+2\frac{\partial\omega_{11}}{\partial p_2}p_1'p_2'+\frac{\partial\omega_{11}}{\partial t}p_1'+\Phi(t,p_1,p_2,p_2'),$$
$$F_2=2\frac{\partial\omega_{22}}{\partial p_1}p_1'p_2'+\frac{\partial\omega_{22}}{\partial p_2}p_2'^2+\frac{\partial\omega_{22}}{\partial t}p_2'+\Psi(t,p_1,p_2,p_1'),$$

worin Φ und Ψ von p_1' bzw. p_2' unabhängig sind, und die Gestalt haben werden

$$\Phi=\Phi_1p_2'^2+\Phi_2p_2'+\Phi_3,\quad \Psi=\Psi_1p_1'^2+\Psi_2p_1'+\Psi_3,$$

worin sämtliche Koeffizienten nur von t,p_1,p_2 abhängen. Die Substitution der Werte von F_1 und F_2 in (22.) liefert die Beziehungen

$$\Phi_1=2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial p_2}-\frac{\partial\omega_{22}}{\partial p_1},\quad \Psi_1=2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial p_1}-\frac{\partial\omega_{11}}{\partial p_2},$$
$$\Phi_2+\Psi_2=4\frac{\partial\omega_{12}}{\partial t},$$

und man kann der letzten dieser Gleichungen gemäß

$$\Phi_2=-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_1}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}+2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial t},\quad \Psi_2=-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}+\frac{\partial\omega_2}{\partial p_1}+2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial t}$$

setzen, so daß F_1 und F_2 die Form annehmen

$$F_1=\frac{\partial\omega_{11}}{\partial p_1}p_1'^2+2\frac{\partial\omega_{11}}{\partial p_2}p_1'p_2'+\Big(2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial p_2}-\frac{\partial\omega_{12}}{\partial p_1}\Big)p_2'^2+$$
$$\frac{\partial\omega_{11}}{\partial t}p_1'+\Big(-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_1}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}+2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial t}\Big)p_2'+\Phi_3,$$

$$F_2=\Big(2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial p_1}-\frac{\partial\omega_{11}}{\partial p_2}\Big)p_1'^2+2\frac{\partial\omega_{22}}{\partial p_1}p_1'p_2'+\frac{\partial\omega_{22}}{\partial p_2}p_2'^2+$$
$$\frac{\partial\omega_{22}}{\partial t}p_2'+\Big(-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}+\frac{\partial\omega_2}{\partial p_1}+2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial t}\Big)p_1'+\Psi_3,$$

und sich somit durch Vergleichung mit (20.) die Bedingungen (19.), (21.), (22.) und (23.) als die für die Umformung der Differentialgleichungen (17.) in *Lagrange*sche Gleichungen hinreichenden ergeben, wenn nur gezeigt

werden kann, daß vermöge (23.) eine Funktion $\omega(t, p_1, p_2)$ bestimmbar ist, welche den Gleichungen

$$\Phi_3 = -\frac{\partial \omega}{\partial p_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - P_1, \quad \Psi_3 = -\frac{\partial \omega}{\partial p_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial t} - P_2$$

genügt, was unmittelbar durch Differentiation dieser Gleichungen nach p_2 und p_1 aus (23.) geschlossen werden kann.

Sind jedoch die Bedingungen (19.), (21.), (22.), (23.) für die Koeffizienten der Differentialgleichungen (17.) nicht erfüllt, haben diese also nicht selbst schon die *Lagrange*sche Form, so wird wieder die Frage entstehen, ob sie einem solchen System *Lagrange*scher Gleichungen äquivalent sein können, oder ob zwei Paare von Multiplikatoren μ_1, μ_2 und m_1, m_2 als Funktionen von t, p_1, p_2, p_1', p_2' gefunden werden können, deren Determinante von Null verschieden ist, und welche dem Differentialgleichungssystem

$$\text{(24.)} \quad \begin{aligned} &(\mu_1 f_{11} + \mu_2 f_{21}) p_1'' + (\mu_1 f_{12} + \mu_2 f_{22}) p_2'' + \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 = 0, \\ &(m_1 f_{11} + m_2 f_{21}) p_1'' + (m_1 f_{12} + m_2 f_{22}) p_2'' + m_1 F_1 + m_2 F_2 = 0 \end{aligned}$$

die *Lagrange*sche Form geben.

Zunächst ergeben sich aus den Gleichungen (19.) die Bedingungen, daß die Größen

$$\mu_1 f_{11} + \mu_2 f_{21}, \quad \mu_1 f_{12} + \mu_2 f_{22}, \quad m_1 f_{11} + m_2 f_{21}, \quad m_1 f_{12} + m_2 f_{22}$$

von p_1' und p_2' unabhängig, und

$$\mu_1 f_{12} + \mu_2 f_{22} = m_1 f_{11} + m_2 f_{21}$$

sein muß, während (21.) und (22.) die Beziehungen nach sich ziehen

$$\frac{\partial(\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2)}{\partial p_1'} = \frac{\partial(\mu_1 f_{11} + \mu_2 f_{21})}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial(\mu_1 f_{11} + \mu_2 f_{21})}{\partial p_2} p_2' + \frac{1}{2} \frac{\partial(\mu_1 f_{11} + \mu_2 f_{21})}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(m_1 F_1 + m_2 F_2)}{\partial p_2'} = \frac{\partial(m_1 f_{12} + m_2 f_{22})}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial(m_1 f_{12} + m_2 f_{22})}{\partial p_2} p_2' + \frac{1}{2} \frac{\partial(m_1 f_{12} + m_2 f_{22})}{\partial t},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2)}{\partial p_2'} + \frac{\partial(m_1 F_1 + m_2 F_2)}{\partial p_1'}\right) = \frac{\partial(\mu_1 f_{12} + \mu_2 f_{22})}{\partial p_1} p_1' +$$

$$\frac{\partial(\mu_1 f_{12} + \mu_2 f_{22})}{\partial p_2} p_2' + \frac{\partial(\mu_1 f_{12} + \mu_2 f_{22})}{\partial t},$$

und nach (23.), wenn der Koeffizient von p_2' in $\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2$ mit φ_2, das von den Ableitungen freie Glied mit φ_3, die analogen Größen in $m_1 F_1 + m_2 F_2$ mit ψ_2 und ψ_3 bezeichnet werden, die identische Gleichung zu erfüllen ist

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial p_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial p_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right) - \frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1}.$$

Setzt man nun ähnlich wie oben

$$(25.)\quad \begin{aligned} &\mu_1 f_{11} + \mu_2 f_{21} = \lambda_{11}(t, p_1, p_2),\ \mu_1 f_{12} + \mu_2 f_{22} = m_1 f_{11} + m_2 f_{21} = \lambda_{12}(t, p_1, p_2),\\ &m_1 f_{12} + m_2 f_{22} = \lambda_{22}(t, p_1, p_2), \end{aligned}$$

worin der Annahme gemäß die Determinante

$$\mu_1 m_2 - m_1 \mu_2 = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}}$$

von Null verschieden ist, so ist wieder leicht ersichtlich, daß

$$(26.)\quad \begin{cases} \dfrac{f_{22} F_1 - f_{12} F_2}{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}} = \varphi_{11} p_1'^2 + \varphi_{12} p_1' p_2' + \varphi_{22} p_2'^2 + \varphi_1 p_1' + \varphi_2 p_2' + \varphi_3, \\ \dfrac{-f_{21} F_1 + f_{11} F_2}{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}} = \psi_{11} p_1'^2 + \psi_{12} p_1' p_2' + \psi_{22} p_2'^2 + \psi_1 p_1' + \psi_2 p_2' + \psi_3 \end{cases}$$

ist, worin die nur von t, p_1, p_2 abhängigen Funktionen φ, ψ, λ vermöge der oben aufgestellten Bedingungen durch die Beziehungen verbunden sind

$$(27.)\quad \begin{cases} \lambda_{11}\varphi_{11} + \lambda_{12}\psi_{11} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_{11}}{\partial p_1}, & \lambda_{11}\varphi_{12} + \lambda_{12}\psi_{12} = \dfrac{\partial \lambda_{11}}{\partial p_2}, \\ \lambda_{12}\varphi_{12} + \lambda_{22}\psi_{12} = \dfrac{\partial \lambda_{22}}{\partial p_1}, & \lambda_{12}\varphi_{22} + \lambda_{22}\psi_{22} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_{22}}{\partial p_2}, \\ \lambda_{12}\varphi_{11} + \lambda_{22}\psi_{11} = \dfrac{\partial \lambda_{12}}{\partial p_1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_{11}}{\partial p_2}, & \lambda_{11}\varphi_{22} + \lambda_{12}\psi_{22} = \dfrac{\partial \lambda_{12}}{\partial p_2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda_{22}}{\partial p_1}, \end{cases}$$

$$(28.)\quad \begin{aligned} &\lambda_{11}\varphi_1 + \lambda_{12}\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial t},\quad \lambda_{12}\varphi_2 + \lambda_{22}\psi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda_{22}}{\partial t}, \\ &\lambda_{11}\varphi_2 + \lambda_{12}\psi_2 + \lambda_{12}\varphi_1 + \lambda_{22}\psi_1 = 2\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$(29.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial p_2}(\lambda_{11}\varphi_3 + \lambda_{12}\psi_3) - \frac{\partial}{\partial p_1}(\lambda_{12}\varphi_3 + \lambda_{22}\psi_3) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_{11}\varphi_2 + \lambda_{12}\psi_2) - \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_{12}\varphi_1 + \lambda_{22}\psi_1) - \frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (27.) nach p_1 und p_2 lassen sich diese, wenn

$$(30.)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial \varphi_{11}}{\partial p_2} + 2\varphi_{22}\psi_{11} - \dfrac{\partial \varphi_{12}}{\partial p_1} - \dfrac{1}{2}\varphi_{12}\psi_{12} = G_1, \\ \varphi_{11}\psi_{12} + 2\dfrac{\partial \psi_{11}}{\partial p_2} + 2\psi_{11}\psi_{22} - \varphi_{12}\psi_{11} - \dfrac{\partial \psi_{12}}{\partial p_1} - \dfrac{1}{2}\psi_{12}^2 = G_2, \\ \dfrac{\partial \varphi_{12}}{\partial p_2} + \dfrac{1}{2}\varphi_{12}^2 + \varphi_{22}\psi_{12} - 2\varphi_{11}\varphi_{22} - 2\dfrac{\partial \varphi_{22}}{\partial p_1} - 2\varphi_{12}\psi_{22} = H_1, \\ \dfrac{1}{2}\varphi_{12}\psi_{12} + \dfrac{\partial \psi_{12}}{\partial p_2} - 2\varphi_{22}\psi_{11} - 2\dfrac{\partial \psi_{22}}{\partial p_1} = H_2 \end{cases}$$

gesetzt und beachtet wird, daß $\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2$ der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, durch

$$G_1\lambda_{11} + G_2\lambda_{12} = 0, \quad H_1\lambda_{12} + H_2\lambda_{22} = 0$$

ersetzen, worin

$$(31.)\qquad G_1 + H_2 = 0$$

ist. Setzt man somit

$$(32.)\qquad \lambda_{11} = -G_2, \quad \lambda_{12} = G_1, \quad \lambda_{22} = H_1$$

und bestimmt die Funktionen $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$, durch die Gleichungen (28.) und (29.), welche nunmehr in

$$(33.)\quad -G_2\varphi_1 + G_1\psi_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial G_2}{\partial t}, \quad G_1\varphi_2 + H_1\psi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial H_1}{\partial t},$$

$$-G_2\varphi_2 + G_1(\psi_2 + \varphi_1) + H_1\psi_1 = 2\frac{\partial G_1}{\partial t},$$

$$(34.)\quad \frac{\partial}{\partial p_2}(-G_2\varphi_3 + G_1\psi_3) - \frac{\partial}{\partial p_1}(G_1\varphi_3 + H_1\psi_3) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(-G_2\varphi_2 + G_1(\psi_2 - \varphi_1) - H_1\psi_1) - \frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1}$$

übergehen, so ergibt sich,

daß, wenn zwei in p_1'' und p_2'' lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche nicht schon selbst die Lagrangesche Form besitzen, durch Multiplikatoren in ein solches Lagrangesches System sollen übergeführt werden können, die Ausdrücke (26.) *ganze Funktionen zweiten Grades in p_1' und p_2' sein müssen, deren Koeffizienten den Gleichungen* (31.), (33.) *und* (34.) *genügen*

die Multiplikatoren selbst ergeben sich aus den Gleichungen (32.) *mittels der Ausdrücke* (25.)

So werden z. B. für die beiden Differentialgleichungen

$$N_1 = p_1 p_2 (1 + 2 p_1) p_1'' + (2 p_2 + p_1^2) p_2'' + p_2 p_1'^2 + 2 p_1^2 p_1' p_2' - 2 p_1^2 - 2 p_2^2 = 0,$$

$$N_2 = p_1 (p_1' + 2 p_2 p_2') p_1'' + (2 p_1' + p_1 p_2') p_2'' - p_1 p_1'^3 + p_2 p_2' p_1'^2 + p_1'^3 + 2 p_1 p_1' p_2'^2 - 2 p_1 p_2' - 2 p_2 p_1' = 0,$$

welche nach (17.)

$$f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = p_1 (4 p_2 - p_1)(p_1 p_1' - p_2 p_2')$$

liefern, für die Ausdrücke (26.) sich in der Tat ganze Funktionen von p_1 und p_2' ergeben, deren Koeffizienten

$$\varphi_{11} = \frac{2 p_2 + p_1^2 - p_1}{p_1 (4 p_2 - p_1)}, \quad \varphi_{12} = \frac{4}{4 p_2 - p_1}, \quad \varphi_{22} = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \frac{2 p_2 - 4}{4 p_2 - p_1},$$

$$\psi_{11} = \frac{p_2 (1 - 2 p_1)}{4 p_2 - p_1}, \quad \psi_{12} = -\frac{2 p_1}{4 p_2 - p_1}, \quad \psi_{22} = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = \frac{2 p_1 - 4 p_2^2}{4 p_2 - p_1}$$

sind und nach (30.) die Werte liefern

$$G_1 = -\frac{4 p_1}{(4 p_2 - p_1)^2}, \quad G_2 = \frac{8 p_1 p_2}{(4 p_2 - p_1)^2}, \quad H_1 = -\frac{8}{(4 p_2 - p_1)^2}, \quad H_2 = \frac{4 p_1}{(4 p_2 - p_1)^2},$$

welche zuvörderst die Bedingungen (31.) und für $P_1 = P_2 = 0$ auch (33.) und (34.) identisch erfüllen. Setzt man sodann den Gleichungen (32.) gemäß

$$\lambda_{11} = 2 p_1 p_2, \quad \lambda_{12} = p_1, \quad \lambda_{22} = 2,$$

so erhält man nach (25.) die Multiplikatoren

$$\mu_1 = \frac{p_1'}{p_1 p_1' - p_2 p_2'}, \quad \mu_2 = -\frac{p_2}{p_1 p_1' - p_2 p_2'}, \quad m_1 = -\frac{p_2'}{p_1 p_1' - p_2 p_2'}, \quad m_2 = \frac{p_1}{p_1 p_1' - p_2 p_2'},$$

und in der Tat nehmen die Gleichungen

$$\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = 2 p_1 p_2 p_1'' + p_1 p_2'' + p_2 p_1'^2 + 2 p_1 p_1' p_2' - 2 p_1 = 0,$$

$$m_1 N_1 + m_2 N_2 = p_1 p_1'' + 2 p_2'' + (1 - p_1) p_1'^2 - 2 p_2 = 0$$

die *Lagrange*sche Form an für das kinetische Potential erster Ordnung

$$H = p_1 p_2 p_1'^2 + p_1 p_1' p_2' + p_2'^2 + p_1^2 + p_2^2.$$

Wirft man nun wieder die Frage auf, wann die für die Differentialgleichung (17.) gefundenen Multiplikatoren ein äquivalentes *Lagrange*sches System erzeugen, so findet man ähnlich wie oben, daß die Ausdrücke

$$f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} \quad \text{und} \quad \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12}^2$$

für dieselben Funktionen p_1 und p_2 von t Null oder unendlich werden müssen, und der erste derselben daher unabhängig von p_1' und p_2' sein muß, eine Bedingung, die, wie leicht zu sehen, in unserem Beispiele nicht erfüllt ist, so daß also wieder im allgemeinen das durch Multiplikatoren aus (17.) hergeleitete *Lagrange*sche System diesem nicht äquivalent sein wird.

In genau derselben Weise werden sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ergeben, daß ein in $p_1'', p_2'', \ldots p_\mu''$ lineares System von μ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Parametern $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ die Form eines *Lagrange*schen Systems für ein kinetisches Potential wägbarer Massen besitzt, und daß im allgemeinen jene Gleichungen durch Multiplikatoren in ein äquivalentes *Lagrange*sches System nicht transformiert werden können.

§ 3.

Bevor ich nun zu dem eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Arbeit übergehe, sollen zunächst noch einige allgemeine Betrachtungen über die Elimination von Variablen zwischen Differentialgleichungen vorausgeschickt werden, welche die Form *Lagrange*scher Gleichungen für beliebige kinetische Potentiale erster Ordnung besitzen.

Sollen zwischen μ *Lagrange*schen Gleichungen

$$(35.) \qquad -\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda'} = P_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \mu)$$

in denen zunächst noch die P_λ als Funktionen von $t, p_1, p_2 \ldots p_\mu$ vorausgesetzt werden, die ϱ Parameter $p_1, p_2, \ldots p_\varrho$ eliminiert werden, so mögen die Größen $p_{\varrho+1}, p_{\varrho+2}, \ldots p_\mu, P_{\varrho+1}, P_{\varrho+2}, \ldots P_\mu$ mit $q_1, q_2, \ldots q_\sigma, Q_1, Q_2, \ldots Q_\sigma$ bezeichnet, und somit das Differentialgleichungssystem (35.) in der Form dargestellt werden

$$(36.) \qquad -\frac{\partial H}{\partial p_r}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'}=P_r, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_s'}=Q_s,$$
$$(r=1,2,\dots\varrho) \qquad (s=1,2,\dots\sigma)$$

worin $\varrho+\sigma=\mu$ ist. Differentiiert man jede der p-Gleichungen und eine beliebige der q-Gleichungen 2ϱ-mal nach t, so erhält man $(\varrho+1)(2\varrho+1)$ Differentialgleichungen, in denen sich die Ableitungen der p und q bis zur $(2\varrho+2)$-ten Ordnung erheben, und man wird aus diesen Gleichungen die sämtlichen p nebst ihren Ableitungen, deren Anzahl $\varrho(2\varrho+3)$ ist, eliminieren können, so daß durch Elimination der Parameter p aus dem Gleichungssystem (36.) sich σ Differentialgleichungen in q von der $(2\varrho+2)$-ten Ordnung ergeben, während $p_a, p_a', \dots p_a^{(2\varrho+1)}$ sich als Funktionen der q und ihrer Ableitungen bis zur $(2\varrho+1)$-ten Ordnung hin darstellen lassen, da eine $2\varrho-1$-malige Differentiation sämtlicher p- und einer q-Gleichung $(\varrho+1)2\varrho$ Gleichungen mit der gleichen Anzahl der zu berechnenden Größen $p_a, p_a', \dots p_a^{(2\varrho+1)}$ liefert. Was nun die Integrationskonstanten betrifft, so ist die Zahl der willkürlichen Konstanten des Systems (36.) $2\varrho+2\sigma$; das resultierende Differentialgleichungssystem in den Größen $q_1, q_2, \dots q_\sigma$ enthält aber jede dieser Größen in der $(2\varrho+2)$-ten Ordnung, und es werden somit die allgemeinen Integrale dieses Systems $(2\varrho+2)\sigma$ Integrationskonstanten liefern. Beachtet man aber, daß bei dem angewandten Eliminationsverfahren, wenn p_a, p_a', p_a'' durch die q und die $(2\varrho+2)\sigma$ Integrationskonstanten ausgedrückt sind, sich p_a' und p_a'' als Ableitungen von p ergeben müssen, so sieht man leicht, daß zwischen jenen Konstanten $2\varrho(\sigma-1)$ Bedingungsgleichungen bestehen müssen, und somit nur $(2\varrho+2)\sigma-2\varrho(\sigma-1)$ oder $2(\varrho+\sigma)$ Konstanten willkürlich bleiben, wie es das ursprüngliche System (36.) verlangte. Ferner kann man bemerken, daß, wenn man die Werte der $p_a, p_a', \dots p_a^{(2\varrho+1)}$ in den q und deren Ableitungen bis zur $(2\varrho+1)$-ten Ordnung hin ausgedrückt in den 2ϱ-ten Differentialquotienten je einer q-Gleichung einsetzt, sich je eine der resultierenden Eliminationsgleichungen als eine in den höchsten Differentialquotienten der $(2\varrho+2)$-ten Ordnung der q lineare Differentialgleichung ergibt, und es wird sich nun darum handeln zu untersuchen, ob und wann diese die Form *Lagrange*scher Gleichungen besitzen.

Zunächst ist ersichtlich, daß die Integralsysteme der q der Differentialgleichungen (36.) mit $2\varrho+2\sigma$ Integrationskonstanten jedenfalls den σ Eliminationsgleichungen in den q von der $(2\varrho+2)$-ten Ordnung genügen, und ebenso die Gleichung befriedigen werden

$$\partial \int_{t_0}^{t_1} \Big[(H) + \sum_{r=1}^{\varrho} P_r (p_r) + \sum_{s=1}^{\sigma} Q_s q_s\Big] dt = 0,$$

in welcher P_r und Q_s als Funktionen von t angenommen werden und die eingeklammerten Ausdrücke die Werte dieser Größen bedeuten sollen, wenn für p_a und p'_a die oben in q und deren Ableitungen bis zur $(2\varrho+1)$-ten Ordnung gefundenen Werte gesetzt werden. Daß nun die gefundenen σ Eliminationsgleichungen in $q_1, q_2, \ldots q_\sigma$ von der $(2\varrho+2)$-ten Ordnung im allgemeinen nicht das kinetische Potential

$$(H) + \sum_{r=1}^{\varrho} P_r (p_r) + \sum_{s=1}^{\sigma} Q_s q_s$$

von der $(2\varrho+1)$-ten Ordnung besitzen, geht daraus hervor, daß die zu einem kinetischen Potential $(2\varrho+1)$-ter Ordnung gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen im allgemeinen von $2(2\varrho+1)$-ter Ordnung sein werden; jedenfalls werden aber die q-Integrale des Systems (36.), da sie dem Eliminationssystem genügen, ebenso wie sämtliche Integrale des letzteren Systems die *Lagrange*schen Gleichungen $2(2\varrho+1)$-ter Ordnung befriedigen, welche dem obigen transformierten kinetischen Potentiale zugehören*). Wir werden daher die für die vorliegende

*) Es mag noch zur Ergänzung des Obigen bemerkt werden, daß, wenn auch im allgemeinen zu einem kinetischen Potential H von der ν-ten Ordnung die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen von der 2ν-ten Ordnung sein werden, für den Fall, daß H in bezug auf alle Differentialquotienten der höchsten Ordnung linear ist, da das letzte Glied der *Lagrange*schen Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}} + (-1)^{\nu+1} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = P_s \qquad (s=1,2,\ldots\mu)$$

in die Form gesetzt werden kann

$$(-1)^{\nu+1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \Big(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}} p_1^{(\nu+1)} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_2^{(\nu)}} p_2^{(\nu+1)} + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\mu^{(\nu)}} p_\mu^{(\nu+1)} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu-1)}} p_1^{(\nu)} + \cdots \Big),$$

der Voraussetzung nach die *Lagrange*schen Gleichungen nur von der $(2\nu-1)$-ten Ordnung sein werden.

Die Glieder der $(2\nu-1)$-ten Ordnung dagegen setzen sich, wie leicht zu sehen, aus den beiden letzten Gliedern der *Lagrange*schen Gleichung in der Form zusammen

Untersuchung in Betracht kommende Frage in der Form stellen müssen, *wann die σ Eliminationsgleichungen, welche von der 2ν-ten Ordnung angenommen werden mögen, ein kinetisches Potential ν-ter Ordnung besitzen, dem sie als Lagrangesche Gleichungen zugehören,* oder im speziellen Falle — und gerade dieser wird uns besonders interessieren — wann die Eliminationsgleichungen in den q *Lagrange*sche Gleichungen zweiter Ordnung sein werden, welche einem kinetischen Potential erster Ordnung entsprechen.

Um den Sinn der gestellten Frage zunächst an einem ganz einfachen Beispiele zu erläutern, mag sich ein Punkt mit der Masseneinheit in der Ebene vermöge einer Kraft bewegen, deren Kräftefunktion durch

$$U=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$$

gegeben ist, so daß die durch das *Hamilton*sche Prinzip

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}H\,dt=0,$$

$$(-1)^{\nu-1}\Big\{\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu-1)}\partial p_1^{(\nu)}}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_1^{(\nu-1)}}\Big)p_1^{(2\nu-1)}$$
$$+\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu-1)}\partial p_2^{(\nu)}}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_2^{(\nu-1)}}\Big)p_2^{(2\nu-1)}+\cdots+\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu-1)}\partial p_\mu^{(\nu)}}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\mu^{(\nu-1)}}\Big)p_\mu^{(2\nu-1)}\Big|$$

und werden daher im allgemeinen nur dann herausfallen, wenn es sich um ein kinetisches Potential von nur *einem* Parameter handelt.

Ein System von Differentialgleichungen 2ν-ter Ordnung kann also ein kinetisches Potential ν-ter Ordnung besitzen, wenn letzteres nur nicht in allen Ableitungen ν-ter Ordnung linear ist; soll aber ein System von Differentialgleichungen $(2\nu-1)$-ter Ordnung ein kinetisches Potential haben, so kann dieses nicht von der $(\nu-1)$-ten Ordnung sein, weil dann die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen von der $(2\nu-2)$-ten Ordnung wären, es muß somit das zugehörige kinetische Potential im allgemeinen von der ν-ten Ordnung und in allen Ableitungen ν-ter Ordnung linear sein. Enthält jedoch das kinetische Potential nur *einen* Parameter und ist dasselbe in der ν-ten Ableitung linear, dann fielen, wie wir sahen, in der *Lagrange*schen Gleichung die Glieder 2ν-ter und $(2\nu-1)$-ter Ordnung heraus; es läßt sich aber in diesem Falle leicht zeigen, daß sich das kinetische Potential auf die $(\nu-1)$-te Ordnung erniedrigen läßt. Sei nämlich die *Lagrange*sche Gleichung

$$N=-\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'}+\cdots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu-1)}}+(-1)^{\nu+1}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}}-P=0,$$

worin P von t und p abhängt, und das kinetische Potential der Annahme nach die Form hat

worin das kinetische Potential

$$H=-\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-U$$

ist, bestimmten Bewegungsgleichungen durch

$$x''=x+y, \quad y''=x-y$$

dargestellt sind. Eliminiert man zwischen beiden Gleichungen durch zweimalige Differentiation der zweiten nach t die Variable x, so ergibt sich die Differentialgleichung vierter Ordnung

---

$$H=\varphi(t,p,p',\dots p^{(\nu-1)})\,p^{(\nu)}+\psi(t,p,p',\dots p^{(\nu-1)}),$$

so wird unter der bekannten Grenzbedingung

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(H+\int P dp)\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}N\delta p\,dt$$

sein. Bildet man nun eine Funktion

$$\omega=\int\varphi(t,p,p',\dots p^{(\nu-1)})\,dp^{(\nu-1)},$$

so wird bekanntlich für

$$K=\frac{d\omega}{dt}=\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}dp^{(\nu-1)}+p'\int\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp^{(\nu-1)}+\dots+p^{(\nu-1)}\int\frac{\partial\varphi}{\partial p^{(\nu-2)}}dp^{(\nu-1)}+p^{(\nu)}\varphi$$

die Variation

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}K dt=0,$$

und es folgt somit

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(H+\int P dp-K)\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}H_1 dt=-\int_{t_0}^{t_1}N\delta p\,dt$$

oder

$$N=-\frac{\partial H_1}{\partial p}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial p'}-\dots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H_1}{\partial p^{(\nu-1)}},$$

worin H_1 nur von der $(\nu-1$-ten) Ordnung ist.

$$y''''-2y=0,$$

welche die Bewegung des Bildes auf der Y-Achse beschreibt, und diese Differentialgleichung besitzt die *Lagrange*sche Form für das kinetische Potential zweiter Ordnung

$$\mathfrak{H}=-\frac{1}{2}y''^2+y^2,$$

für welches sie in

$$-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial y}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial y'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial y''}=0$$

transformiert werden kann.

Um nun zunächst die Elimination *eines* Parameters zwischen *zwei* zu einem beliebigen kinetischen Potential erster Ordnung gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen durchzuführen und zu entscheiden, ob diese Eliminationsgleichung eine zu einem kinetischen Potential zweiter Ordnung gehörige *Lagrange*sche Gleichung vierter Ordnung ist, müssen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein in p'''' linearer Ausdruck

$$N=f(t,p,p',p'',p''')p''''+F(t,p,p',p'',p''') \tag{37.}$$

ein *Lagrange*scher Differentialausdruck eines kinetischen Potentials zweiter Ordnung ist, welche bekanntlich durch die identisch zu erfüllenden Gleichungen

$$2\frac{\partial N}{\partial p'}-2\frac{d}{dt}\frac{\partial N}{\partial p''}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial N}{\partial p'''}=0, \tag{38.}$$

$$\frac{\partial N}{\partial p'''}-2\frac{d}{dt}\frac{\partial N}{\partial p''''}=0 \tag{39.}$$

gegeben sind, in eine etwas andere Form bringen.

Setzt man nämlich den Wert von N aus (37.) in (38.) und (39.) ein, so folgt leicht durch Bestimmung von F für N der Ausdruck

$$N=fp''''+\frac{\partial f}{\partial p''}p'''^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}p'+\frac{\partial f}{\partial p'}p''\right)p'''+\varphi, \tag{40.}$$

worin f sowohl als auch φ nur von t,p,p',p'' abhängen, und die Substitution dieses Ausdruckes in (38.) liefert die beiden von f und φ identisch zu erfüllenden Gleichungen

$$(41.)\quad \begin{cases} G_1 = 3\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p'^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial p''} + 2p' \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial p \partial p''} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p'} + 2p'' \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial p' \partial p''} \\ + p'' \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial p''} + p'^2 \frac{\partial^3 f}{\partial p^2 \partial p''} + 3p' \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial p'} + 3p'' \frac{\partial^2 f}{\partial p'^2} + 2p'p'' \frac{\partial^3 f}{\partial p \partial p' \partial p''} \\ + p''^2 \frac{\partial^3 f}{\partial p'^2 \partial p''} = 0, \\ G_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial p'} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p''} - p' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial p''} - p'' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p' \partial p''} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} + 3p' \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial p} + 3p'' \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial p'} \\ + 3p'' \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p} + 3p'^2 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial p^2} + 6p'p'' \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial p \partial p'} + 3p''^2 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial p'^2} \\ + 3p'p'' \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 3p''^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial p'} + p'^3 \frac{\partial^3 f}{\partial p^3} + 3p'^2 p'' \frac{\partial^3 f}{\partial p^2 \partial p'} + 3p'p''^2 \frac{\partial^3 f}{\partial p \partial p'^2} \\ + p''^3 \frac{\partial^3 f}{\partial p'^3} = 0, \end{cases}$$

deren linke Seiten für den Fall, daß N, also auch f und φ die Variable t nicht explizite enthalten, die identische Beziehung liefern

$$p' \frac{\partial G_1}{\partial p} + p'' \frac{\partial G_2}{\partial p'} = -\frac{\partial G_2}{\partial p''}.$$

Seien nun zwei zu einem beliebigen, von t freien kinetischen Potential erster Ordnung H gehörige *Lagrange*sche Gleichungen von zwei Parametern

$$(42.)\quad -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = P_1,$$

$$(43.)\quad -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'} = P_2$$

vorgelegt, in denen P_1 und P_2 zunächst noch Funktionen von t, p_1, p_2 sein sollen, und werde angenommen, daß p_1'' in der Gleichung (42.) nicht enthalten ist, so wird die Elimination des Parameters p_1 zwischen den Gleichungen (42.) und (43.) verlangt, was später in größerer Allgemeinheit und Einfachheit sich wird durchführen lassen.

Da der Voraussetzung nach $\frac{\partial^2 H}{\partial p_1'^2} = 0$ ist, so wird die partielle Differentiation der linken Seite von (42.) nach p_1' den Wert Null liefern, die Gleichung also von p_1'' und p_1' frei sein, und der sich somit ergebende Ausdruck

$$(44.)\quad p_1 = \omega(p_2, p_2', p_2'')$$

nebst seinen nach t genommenen Ableitungen wird in die Gleichung (43.) eingesetzt, wenn man berücksichtigt, daß das kinetische Potential nunmehr die Form hat

$$(45.) \qquad H=f(p_1, p_2, p_2')\,p_1'+f_1(p_1, p_2, p_2'),$$

dieselbe bei bekannter Bezeichnung in

$$(46.)\ \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)(p_1)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2'}\right)(p_1')-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial p_2'}\right)(p_1')\,p_2-\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial p_2 \partial p_2'}\right)p_2'$$
$$-\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)(p_1'')-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2}\right)(p_1')\,p_2''-\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial p_2'^2}\right)p_2''=(P_2)$$

überführen.

Setzen wir nun den Koeffizienten von p_2'''' in dieser Gleichung

$$(47.) \qquad -\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}=F,$$

so wird der von $p_2'''^2$

$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2'}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)\frac{\partial^2 \omega}{\partial p_2''^2}=\frac{\partial F}{\partial p_2''}$$

sein, und somit die Gleichung (46.) zunächst die Form annehmen

$$(48.) \qquad N_2=F(p_2, p_2', p_2'')\,p_2''''+\frac{\partial F}{\partial p_2''}p_2'''^2+F_1(p_2, p_2', p_2'')\,p_2'''$$
$$+\varphi(p_2, p_2', p_2'')=(P_2),$$

also in ihren beiden ersten Teilen die Gestalt der Gleichung (40.) besitzen.

Da aber in (46.) der Koeffizient von p_2'''

$$F_1=\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}-2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2'}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2}\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}p_2'+\frac{\partial \omega}{\partial p_2'}\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}p_2''\right)-\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1 \partial p_2'}\right)\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}$$
$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2 \partial p_2'}\right)\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}p_2'-\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2'}+2\frac{\partial^2 \omega}{\partial p_2 \partial p_2''}p_2'+2\frac{\partial^2 \omega}{\partial p_2' \partial p_2''}p_2''\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2}\right)\frac{\partial \omega}{\partial p_2''}p_2''$$

vermöge der identischen Gleichung

$$(49.) \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)p_2'+\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)p_2''-(P_1),$$

wie durch partielle Differentiation derselben nach p_2' und p_2'' leicht zu ent-

wickeln, in

$$F_1 = -2p_2'\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2\partial p_2''} - 2p_2'\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2\partial p_2'}\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2'}\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_2}\right]$$
$$-2p_2''\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2'\partial p_2''} + 2p_2''\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_2'^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2'}\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_2'}\right]+\frac{\partial(P_1)}{\partial p_2'}\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}$$
$$-\frac{\partial(P_1)}{\partial p_2''}\frac{\partial\omega}{\partial p_2'}$$

oder endlich vermöge (47.) in

$$(50.)\qquad F_1 = 2\left(\frac{\partial F}{\partial p_2}p_2' + \frac{\partial F}{\partial p_2'}p_2''\right)+\frac{\partial(P_1)}{\partial p_2'}\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}-\frac{\partial(P_1)}{\partial p_2''}\frac{\partial\omega}{\partial p_2'}$$

übergeht, so wird nach (40.)

$$\frac{\partial(P_1)}{\partial p_2'}\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}-\frac{\partial(P_1)}{\partial p_2''}\frac{\partial\omega}{\partial p_2'}=0$$

sein, oder wir werden im allgemeinen annehmen müssen, daß P_1 von p_1 unabhängig ist, und unter dieser Voraussetzung wird dann vermöge (50.) der Ausdruck (48.), dem von (40.) analog, in die Form

$$N_2 = F(p_2, p_2', p_2'')p_2'''' + \frac{\partial F}{\partial p_2}p_2'''^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial p_2}p_2' + \frac{\partial F}{\partial p_2'}p_2''\right)p_2''' + \varphi(p_2, p_2', p_2'') = (P_2)$$

transformiert sein.

Da aber

$$\varphi = \left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2}p_2' + \frac{\partial\omega}{\partial p_2'}p_2''\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)-p_2'\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)-p_2''\frac{\partial}{\partial p_2'}\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)\right]-\left(\frac{\partial f}{\partial p_2'}\right)\left[\frac{\partial\omega}{\partial p_2}p_2''\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2^2}p_2'^2+2\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2\partial p_2'}p_2'p_2''+\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2'^2}p_2''^2\right]-\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_2}\right)-p_2'\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_2'}\right)-p_2''\frac{\partial}{\partial p_2'}\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_2'}\right),$$

wie aus der identischen Gleichung (49.) zu ersehen, den beiden, durch die Annahme, daß t nicht explizite vorkommen sollte, vereinfachten Bedingungsgleichungen (41.) und (42.) Genüge leistet, so wird, wenn noch die Annahme gemacht wird, daß auch P_2 von p_1 unabhängig ist, folgen, *daß die Eliminationsgleichung in p_2 aus den beiden Lagrangeschen Gleichungen* (42.) *und* (43.), *in denen P_1 und P_2 den Parameter p_1 nicht enthalten und bei denen in der ersten Gleichung p_1'' nicht vorkommt, eine Lagrangesche Differentialgleichung vierter Ordnung ist.*

Würde man jedoch nicht die für ein kinetisches Potential zweiter Ordnung notwendigen und hinreichenden Bedingungen zweier in den zweiten Ableitungen linearen Differentialausdrücke zugrunde gelegt haben, so könnte man zunächst nur aus (44.) folgern, daß die Eliminationsgleichung vierter Ordnung ein Integral derjenigen *Lagrange*schen Gleichung ist, welche die Hauptgleichung der Variation des transformierten kinetischen Potentials darstellt. Sei allgemeiner als oben

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(H + \int P_1 d p_1 + \int P_2 d p_2 \right) dt = 0,$$

worin P_1 nur von t und p_1, P_2 nur von t und p_2 abhängen soll, so sind die beiden Hauptgleichungen (42.) und (43.), und setzt man zufolge der Form (45.) des kinetischen Potentials und der Substitution (44.) und deren Ableitung

$$(H) + \left(\int P_1 d p_1 \right) + \int P_2 d p_2 = \psi(p_2, p_2', p_2'') p_2''' + \psi_1(p_2, p_2', p_2'),$$

so würde das transformierte kinetische Potential von der dritten Ordnung im allgemeinen eine *Lagrange*sche Gleichung der sechsten Ordnung ergeben, von der die gefundene Eliminationsgleichung vierter Ordnung ein Integral wäre, während in dem vorliegenden Falle, weil das kinetische Potential in der dritten Ableitung linear ist, sich dieses der obigen Anmerkung zufolge auf die zweite Ordnung erniedrigen läßt, und daher das kinetische Potential der durch Elimination von p_1 entstandenen Differentialgleichung ist.

Mit Hilfe der oben aufgestellten, für die Existenz eines kinetischen Potentials zweiter Ordnung notwendigen und hinreichenden Bedingungen läßt sich ebenso erweisen, *daß, wenn in der Gleichung* (43.) p_1' *und* p_1'' *nicht enthalten sind, für konstante Werte von* P_1 *und* P_2 *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Eliminationsresultat in* p_2 *eine Lagrangesche Gleichung für ein kinetisches Potential zweiter Ordnung ist, durch die Form des kinetischen Potentials gegeben ist*

$$H = a_1 p_1'^2 + a_2 p_2'^2 + \varphi(p_1 - \lambda_1 p_2) + \psi(p_1 - \lambda_2 p_2),$$

worin a_1 *und* a_2 *beliebige Konstanten,* $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{a_2}{a_1}$ *ist, und* φ *und* ψ *beliebige Funktionen ihrer Argumente bedeuten.*

Entwickelt man nämlich aus der zweiten der beiden zu H gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen

$$2a_1 p_1'' - \varphi'(p_1 - \lambda_1 p_2) - \psi'(p_1 - \lambda_2 p_2) = P_1,$$
$$2a_2 p_2'' + \lambda_1 \varphi'(p_1 - \lambda_1 p_2) + \lambda_2 \psi'(p_1 - \lambda_2 p_2) = P_2$$

den Ausdruck

$$p_1 = \omega(p_2, p_2''),$$

so geht die erste Gleichung durch Substitution dieses Wertes in

$$N = 2a_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2} p_2'' + \frac{\partial\omega}{\partial p_2''} p_2''' + \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2^2} p_2'^2 + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2 \partial p_2''} p_2' p_2''' + \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2''^2} p_2'''^2\right)$$
$$- \varphi'(\omega - \lambda_1 p_2) - \psi'(\omega - \lambda_2 p_2) = P_1$$

über, welche den Gleichungen (39.) und (40.) identisch genügen soll. Nun ist aber unmittelbar zu sehen, daß die Gleichung (40.) befriedigt ist, während die Gleichung (39.) die Identität der beiden Beziehungen erfordert

$$2a_1 \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2^2} + \varphi'' \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2 \partial p_2''} + \varphi''' \left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_1\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_2''} + \psi'' \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2 \partial p_2''} + \psi''' \left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_2\right)\frac{\partial\omega}{\partial p_2''} = 0,$$
$$2a_1 \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2 \partial p_2''} + \varphi'' \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2''^2} + \varphi''' \left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\right)^2 + \psi'' \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2''^2} + \psi''' \left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\right)^2 = 0.$$

Die Richtigkeit dieser beiden Gleichungen ergibt sich aber einfach daraus, daß die Substitution des Wertes von $p_1 = \omega(p_2, p_2'')$ in die zweite der oben gegebenen *Lagrange*schen Gleichungen dieselbe identisch befriedigen muß, und die sodann nach p_2 und p_2'' ausgeführte Differentiation die Werte liefert

$$\varphi'' = -\frac{2a_2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_2}{\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}}, \quad \psi'' = -\frac{2a_2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_1}{\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}},$$

$$\varphi''' = -\frac{2a_2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2^2} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2 \partial p_2''}}{\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\right)^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_1\right)},$$

$$\psi''' = -\frac{2a_2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2^2} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_1\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial p_2 \partial p_2''}}{\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2''}\right)^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_2} - \lambda_2\right)},$$

welche, in jene beiden Gleichungen eingesetzt die geforderten Identitäten erfüllen.

Daß die Elimination von p_1 aus den oben aufgestellten *Lagrange*schen Gleichungen auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung führt, welche wiederum die *Lagrange*sche Form, also ein kinetisches Potential zweiter Ordnung besitzt, kann in diesem Falle nicht wie oben aus der Form des transformierten kinetischen Potentials

$$(H) = a_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_2} p_2' + \frac{\partial \omega}{\partial p_2''} p_2''' \right)^2 + a_2 p_2'^2 + \varphi(\omega - \lambda_1 p_2) + \psi(\omega - \lambda_2 p_2)$$

geschlossen werden, da dasselbe nicht in p_2''' linear ist. Um das zu der oben gefundenen Eliminationsgleichung $N = P_1$ gehörige kinetische Potential zweiter Ordnung $\mathfrak{H}$ zu finden, müssen wir mit dieser die Gleichung

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2'} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_2''} = P_1$$

zusammenstellen und erhalten

$$\mathfrak{H} = -2a_1 \int \omega \, dp_2'' + a_1(\lambda_1 + \lambda_2) p_2 p_2'' + \int \Big[2a_1 \int \frac{\partial \omega}{\partial p_2} dp_2'' - 2a_1(\lambda_1 + \lambda_2) p_2'' + \varphi'(\omega - \lambda_1 p_2) - \psi'(\omega - \lambda_2 p_2) \Big] dp_2,$$

worin, wie aus den oben gefundenen Werten von φ'' und ψ'' zufolge der Relation $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_2}{a_1}$ hervorgeht, die Funktion unter dem Integral von p_2'' unabhängig ist.

§ 4.

Nachdem in speziellen Fällen die Elimination einer Variabeln zwischen zwei dynamischen Differentialgleichungen und die Untersuchung des Eliminationsresultates hinsichtlich ihres Charakters als Hauptgleichung der Variation durchgeführt worden, nehmen wir nunmehr ganz allgemein das Problem für ein System *Lagrange*scher Gleichungen in Angriff, welche einem kinetischen Potentiale erster Ordnung zugehören, und für welche die Elimination nicht durch etwa mögliche Integrationen, wie wir sie später betrachten werden, geleistet werden soll.

Wenn auch die Elimination von Parametern im Grunde zunächst nur für ein kinetisches Potential wägbarer Massen in Frage kommt, welches

nach den früheren Auseinandersetzungen eine quadratische Funktion der ersten Ableitungen der Parameter ist, in welcher die Koeffizienten aller quadratischen Glieder von Null verschieden sind, und speziell eine homogene Funktion zweiten Grades dieser Größen, wenn in den Bedingungsgleichungen des Problems die Zeit nicht explizite enthalten war, so soll doch im folgenden mit Rücksicht auf andere Probleme als die der Mechanik wägbarer Massen angenommen werden, daß das kinetische Potential eine beliebige quadratische Funktion erster Ordnung sei, und die Frage behandelt werden, wann für ein solches kinetisches Potential erster Ordnung die Elimination einzelner Parameter auf Differentialgleichungen in den übrigen Parametern führt, welche zu einem kinetischen Potential irgend welcher Ordnung gehörige *Lagrange*sche Gleichungen sind.

Sondern wir die Parameter $p_1, p_2, \dots p_\mu$ in zwei Gruppen $p_1, p_2, \dots p_\varrho$ und $q_1, q_2, \dots q_\sigma$, so daß $\varrho + \sigma = \mu$ ist, und stellen nunmehr die Aufgabe, aus den μ *Lagrange*schen Gleichungen

$$(51.) \qquad -\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} = P_r, \qquad (r = 1, 2, \dots \varrho)$$

$$(52.) \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_s'} = Q_s, \qquad (s = 1, 2, \dots \sigma)$$

in denen P_r und Q_s Funktionen von t oder Konstanten sind, die Parameter $p_1, p_2, \dots p_\varrho$ und deren Ableitungen zu eliminieren.

Werde zunächst angenommen, daß

I. in den Gleichungen (51.) die Größen $p_1', \dots p_\varrho', p_1'', \dots p_\varrho''$ nicht enthalten sind, so werden, wie leicht ersichtlich, für alle Kombinationen der Indizes r und $\mathfrak{r}$, welche die Werte $1, 2, \dots \varrho$ annehmen, die identischen Gleichungen bestehen

$$(53.) \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial p_\mathfrak{r}'} = 0,$$

$$(54.) \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_\mathfrak{r}'} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_\mathfrak{r} \partial p_r'}, \text{ *)}$$

*) Für den Fall, daß $\varrho = 1$ ist, folgt, wie früher erwähnt, daß, wenn p_1'' in der zu p_1 gehörigen *Lagrange*schen Gleichung nicht enthalten ist, auch p_1' ohne weitere Bedingung von selbst herausfällt.

und somit das kinetische Potential die Form haben müssen

$$(55.)\quad \begin{aligned} H = {} & \sum_{\substack{r=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma}} \varphi_{rs}(t, p_1, \dots q_1, \dots)\, p_r' q_s' + \sum_{m,n=1,\dots\sigma} \psi_{mn}(t, p_1, \dots q_1, \dots)\, q_m' q_n \\ & + \sum_{r=1,\dots\varrho} \chi_r(t, p_1, \dots q_1, \dots) p_r' + \sum_{s=1,\dots\sigma} \vartheta_s(t, p_1, \dots q_1, \dots) q_s' + F(t, p_1, \dots q_1, \dots), \end{aligned}$$

worin nach (54.) die Beziehungen bestehen müssen

$$(56.)\quad \frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial \varphi_{\varkappa s}}{\partial p_r}, \quad \frac{\partial \chi_r}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial \chi_\varkappa}{\partial p_r};$$

in der Tat sieht man umgekehrt, daß dann auch die Gleichungen (51.) von den ersten und zweiten Ableitungen der Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ unabhängig sind.

Berechnet man nun aus den ϱ Gleichungen (51.)

$$(57.)\quad p_r = \omega_r(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots), \qquad (r=1, 2, \dots \varrho)$$

woraus

$$p_r' = \frac{\partial \omega_r}{\partial q_1''} q_1''' + \cdots, \quad p_r'' = \frac{\partial \omega_r}{\partial q_1'} q_1'''' + \cdots$$

folgt, und setzt diese Werte in (52.) ein, so ergeben sich σ Differentialgleichungen vierter Ordnung, während das kinetische Potential (55.) in eine in den dritten Ableitungen der q lineare Funktion von der Form übergeht

$$(58.)\quad \begin{aligned} (H) = {} & \Omega_1(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots)\, q_1''' + \Omega_2(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'' \dots) q_2''' + \cdots \\ & + \Omega_\sigma(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1', \dots)\, q_\sigma''' + \Omega(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots). \end{aligned}$$

Die diesem kinetischen Potential dritter Ordnung entsprechenden *Lagrange*schen Gleichungen werden somit einer früheren Bemerkung zufolge von der fünften Ordnung sein, und es wird daher zunächst nur geschlossen werden können, daß die gefundenen Differentialgleichungen vierter Ordnung in $q_1, \dots q_\sigma$ den *Lagrange*schen Gleichungen fünfter Ordnung Genüge leisten. Setzt man aber aus (57.) die Werte von p_r und deren erste Ableitungen in (55.) ein, so folgt für die Koeffizienten von q_λ''' in (H)

$$\Omega_\lambda(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots) = \sum_{r=1}^{\varrho} \frac{\partial \omega_r}{\partial q_\lambda''} \Big(\sum_{s=1}^{\sigma} (\varphi_{rs})\, q_s' + (\chi_r) \Big),$$

worin die eingeklammerten Ausdrücke die bekannte Bedeutung haben; da

aber aus den Gleichungen (56.) folgt, daß

$$\sum_{s=1}^{\sigma}\left\{\left(\frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial p_\tau}\right)q_s' + \left(\frac{\partial \chi_r}{\partial p_\tau}\right)\right\} = \sum_{s=1}^{\sigma}\left\{\left(\frac{\partial \varphi_{\tau s}}{\partial p_r}\right)q_s' + \left(\frac{\partial \chi_\tau}{\partial p_r}\right)\right\},$$

so ist leicht ersichtlich, daß

$$\frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial q_\nu''} = \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial q_\lambda''}$$

wird, und somit eine Funktion $\Phi(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots)$ existiert, für welche

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Omega_1 q_1''' + \Omega_2 q_2''' + \cdots + \Omega_\sigma q_\sigma''' + \overline{\Omega}(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots)$$

ist. Dann kann aber bekanntlich das kinetische Potential (H) in (58.) durch die Gleichung

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(H)\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left((H) - \frac{d\Phi}{dt}\right)dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\overline{H}(t, q_1, \dots q_1, \dots q_1'', \dots)\,dt$$

auf das kinetische Potential $\overline{H}$ von der zweiten Ordnung reduziert werden, dessen zugehörige *Lagrange*sche Gleichungen nur von der vierten Ordnung, also die oben gefundenen Eliminationsgleichungen sein werden, und wir finden somit,

daß, wenn die zu $p_1, \dots p_\varrho$ gehörigen Lagrangeschen Gleichungen die ersten und zweiten Ableitungen der Parameter p nicht enthalten, die Elimination der p aus den $\varrho + \sigma$ Gleichungen auf σ Differentialgleichungen vierter Ordnung führt, welche σ einem kinetischen Potential zweiter Ordnung zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen äquivalent sind.

So wird z. B. für das kinetische Potential erster Ordnung von zwei Parametern

$$H = p\,q\,p'\,q' + \frac{1}{3}p^3 + q'^2,$$

für welches in der zu p gehörigen *Lagrange*schen Gleichung

$$p = q\,q'' + q'^2$$

p' und p'' fehlen, die Substitution dieses Wertes von p die zu q gehörige Gleichung in die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(qq''+q'^2)(q^2q''''+4qq'q'''+3qq''^2)+q(q^2q'''^2+9q'^2q''^2+6qq'q''q''')+2q''=0$$

überführen, während zunächst das kinetische Potential eine Funktion dritter Ordnung von der Form wird

$$(H)=qq'(qq''+q'^2)(qq'''+3q'q'')+\frac{1}{3}(qq''+q'^2)^3+q'^2;$$

bildet man aber die Funktion

$$\Phi=\frac{1}{2}q^3q'q''^2+q^2q'^3q'',$$

so wird das kinetische Potential

$$\overline{H}=(H)-\frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{3}q'^6-\frac{1}{2}q^2q'^2q''^2-\frac{1}{6}q^3q''^3+2qq'^4q''+q'^2$$

zweiter Ordnung, wie man unmittelbar sieht, als *Lagrange*sche Gleichung vierter Ordnung das oben gefundene Eliminationsresultat nach sich ziehen.

Wird den früheren Bedingungen noch die hinzugefügt, daß auch die Gleichungen (52.) die Größen $p_1'', \dots p_\varrho''$ nicht enthalten sollen, also, wie durch Differentiation nach p_r'' hervorgeht,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_s' \partial p_r'}=0 \qquad (r=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma)$$

sein soll, so wird das kinetische Potential (55.) die Form annehmen

$$H=\sum_{m,n=1,\dots\sigma}\psi_{mn}(t,p_1,\dots q_1,\dots)\,q_m'\,q_n'+\sum_{r=1,\dots\varrho}\chi_r(t,p_1,\dots q_1,\dots)\,p_r'$$
$$+\sum_{s=1,\dots\sigma}\vartheta_s(t,p_1,\dots q_1,\dots)\,q_s'+F(t,p_1,\dots q_1,\dots),$$

sodaß die Gleichungen (51.) in

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r}+\frac{d\chi_r}{dt}=P_r$$

und (57.) daher in

$$p_r=\omega_r(t,q_1,\dots q_1',\dots) \qquad (r=1,\dots\varrho)$$

übergehen. Setzt man nunmehr diese Werte von p_r in das Gleichungssystem (52.) ein, so ergeben sich σ Differentialgleichungen zweiter Ordnung

in den q, während die Substitution der p in das kinetische Potential H eine in $q_1'', \dots q_\sigma''$ lineare Funktion zweiter Ordnung (H) liefert, welche im allgemeinen *Lagrange*sche Differentialgleichungen dritter Ordnung nach sich ziehen würde. Da aber der in den zweiten Ableitungen lineare Teil von (H) durch den Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{\varrho} \chi_r \sum_{\tau=1}^{\varrho} \frac{\partial \omega_r}{\partial q_\tau'} q_\tau''$$

dargestellt ist, so werden die nach q_ε' und q_δ' genommenen partiellen Differentialquotienten von q_δ'' und q_ε'' einander gleich sein, und sich somit wieder durch Subtraktion eines vollständigen nach t genommenen Differentialquotienten einer Funktion von $t, q_1, \dots q_1', \dots$ das kinetische Potential zweiter Ordnung auf ein solches erster Ordnung erniedrigen lassen*); wir finden also,

daß, wenn die Gleichungen (51.) *und* (52.) *von* $p_1'', \dots p_\varrho''$, *die ersteren außerdem von* $p_1', \dots p_\varrho'$ *unabhängig sind, die Elimination der Parameter* p *zu* σ *Differentialgleichungen zweiter Ordnung in* $q_1, \dots q_\sigma$ *führt, welche Lagrangeschen Gleichungen für ein kinetisches Potential erster Ordnung äquivalent sind.*

Den hier gestellten Bedingungen wird offenbar genügt sein, wenn man voraussetzt, daß das kinetische Potential H von den ersten Ableitungen der Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ unabhängig ist, und in diesem Falle wird sich die Richtigkeit des eben ausgesprochenen Satzes unmittelbar erkennen lassen. Denn da dann die Gleichungen (51.) in

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0, \quad \dots \frac{\partial H}{\partial p_\varrho} = 0$$

übergehen und somit wieder $p_r = \omega_r(t, q_1, \dots q_1', \dots)$ liefern, werden die Differentialgleichungen (52.) durch diese Substitution in σ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in $q_1, \dots q_\sigma$ transformiert, welche in den zweiten Ableitungen dieser Parameter linear sind, und für welche das kinetische Potential (H), welches durch eben diese Substitution aus H hervorgeht, von der ersten Ordnung ist.

*) Was auch schon daraus ersichtlich ist, daß aus dem Ausdruck (55.) für das kinetische Potential wegen der zweiten der Bedingungsgleichungen (56.) durch Subtraktion eines nach t genommenen totalen Differentialquotienten die in p_r' lineare Summe $\sum_{r=1}^{\varrho} \chi_r(t, p_1, \dots q_1, \dots) p_r'$ herausgeschafft werden kann, und somit oben die Substitution von p_r in den Ausdruck des kinetischen Potentials denselben nur in eine Funktion erster Ordnung transformieren wird.

Enthalten jedoch

II. die Gleichungen (51.) nicht die Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ und deren zweite Ableitungen, so werden sich durch partielle Differentiation nach p_τ'' und p_τ, wie leicht zu sehen, die identisch zu erfüllenden Beziehungen ergeben

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial p_\tau'} = 0, \quad {\scriptstyle (r,\tau=1,\dots\varrho)} \qquad \frac{\partial^3 H}{\partial p_r' \partial p_\tau \partial q_s'} = 0, \quad {\scriptstyle (r,\tau=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma)}$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_\tau} + \frac{\partial^3 H}{\partial p_r' \partial p_\tau \partial t} + \sum_{\tau_1=1}^{\varrho} \frac{\partial^3 H}{\partial p_r' \partial p_\tau \partial p_{\tau_1}} p_{\tau_1}' + \sum_{s=1}^{\sigma} \frac{\partial^3 H}{\partial p_r \partial p_\tau \partial q_s} q_s' = 0,$$

welche dem kinetischen Potential (55.) die Form geben

$$H = \sum_{\substack{r,s \\ r=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma}} \varphi_{rs}(t, q_1, \dots q_\sigma)\, p_r' q_s' + \sum_{\substack{m,n \\ m,n=1,\dots\sigma}} \psi_{mn}(t, p_1, \dots q_1, \dots)\, q_m' q_n'$$

$$+ \sum_{r_1=1,\dots\varrho} \chi_{r_1}(t, p_1, \dots q_1, \dots)\, p_{r_1}' + \sum_{s=1,\dots\sigma} \vartheta_s(t, p_1, \dots q_1, \dots)\, q_s' + F(t, p_1, \dots q_1, \dots),$$

worin

$$\frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial p_r \partial p_\tau} = 0, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial p_r \partial p_\tau} + \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial p_\tau \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi_{r_1}}{\partial p_r \partial p_\tau} = \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial p_{r_1} \partial p_\tau}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_s}{\partial p_r \partial p_\tau} = \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial q_s \partial p_\tau}$$

oder

$$H = \sum_{\substack{r,s \\ r=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma}} \varphi_{rs}(t, q_1, \dots q_\sigma)\, p_r' q_s' + \sum_{\substack{m,n \\ m,n=1,\dots\sigma}} (\psi_{mn}^{(1)} p_1 + \dots + \psi_{mn}^{(\varrho)} p_\varrho + \psi_{mn}^{(0)})\, q_m' q_n'$$

$$(59.) \qquad + F(t, p_1, \dots q_1, \dots) + \sum_{r_1=1,\dots\varrho} \chi_{r_1}(t, p_1, \dots q_1, \dots)\, p_{r_1}' + \sum_{s=1,\dots\sigma} \vartheta_s(t, p_1, \dots q_1, \dots) q_s',$$

und die $\psi_{mn}^{(\alpha)}$ nur von $t, q_1, \dots q_\sigma$ abhängen, ebenso wie die Differenzen

$$-\frac{\partial F}{\partial p_r} + \frac{\partial \chi_r}{\partial t}, \quad \frac{\partial \chi_{r_1}}{\partial p_r} - \frac{\partial \chi_r}{\partial p_{r_1}}, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial p_r} - \frac{\partial \chi_r}{\partial q_s}. \qquad {\scriptstyle (r, r_1=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma)}$$

Das System der Gleichungen (51.) nimmt hiernach die Form an

$$-\sum_{\substack{m,n \\ m,n=1,\dots\sigma}} \psi_{mn}^{(r)} q_m' q_n' - \frac{\partial F}{\partial p_r} - \sum_{r_1=1,\dots\varrho} \frac{\partial \chi_{r_1}}{\partial p_r} p_{r_1}' - \sum_{s=1,\dots\sigma} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial p_r} q_s'$$

$$(60.) \qquad + \frac{d}{dt}(\varphi_{r1} q_1' + \dots + \varphi_{r\sigma} q_\sigma' + \chi_r) = P_r, \qquad {\scriptstyle (r=1,\dots\varrho)}$$

und man sieht unmittelbar, daß in der Tat diese *Lagrange*schen Gleichungen vermöge der oben aufgestellten Bedingungen von $p_1, \dots p_\varrho, p_1'', \dots p_\varrho''$ unabhängig sind, und die Koeffizienten von p_τ' durch den Ausdruck

$$\frac{\partial \chi_r}{\partial p_\mathfrak{r}} - \frac{\partial \chi_\mathfrak{r}}{\partial p_r}$$

gegeben sind.

Eine Elimination der Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ in algebraischem Sinne zwischen den Gleichungen (60.) und dem Differentialgleichungssystem (52.), welches für die Form (59.) des kinetischen Potentials in

$$\begin{aligned}
&- \sum_{\substack{r,s \\ r=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma}} \frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial q_{s_1}} p'_r q'_s - \sum_{\substack{m,n \\ m,n=1,\dots\sigma}} \Big(\frac{\partial \psi^{(1)}_{mn}}{\partial q_{s_1}} p_1 + \dots + \frac{\partial \psi^{(\varrho)}_{mn}}{\partial q_{s_1}} p_\varrho + \frac{\partial \psi^{(0)}_{mn}}{\partial q_{s_1}} \Big) q'_m q'_n \\
&- \frac{\partial F}{\partial q_{s_1}} - \sum_{r_1=1}^{\varrho} \frac{\partial \chi_{r_1}}{\partial q_{s_1}} p'_{r_1} - \sum_{s=1}^{\sigma} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial q_{s_1}} q'_s \\
&+ \frac{d}{dt} \Big[\sum_{r=1}^{\varrho} \varphi_{rs_1} p'_r + \sum_{m=1}^{\sigma} (\psi^{(1)}_{ms_1} p_1 + \dots + \psi^{(\varrho)}_{ms_1} p_\varrho + \psi^{(0)}_{ms_1}) q'_m + \vartheta_{s_1} \Big] = Q_{s_1}
\end{aligned} \qquad (61.)$$

$(s_1 = 1, 2, \dots \sigma)$

übergeht, wird also nur dann möglich sein, wenn auch in dem System (61.) die Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ nicht enthalten sind, oder wenn, wie leicht durch Differentiation nach $p_\mathfrak{r}$ $(\mathfrak{r} = 1, \dots \varrho)$ zu ersehen, $\psi^{(\mathfrak{r})}_{mn} = 0$, und die Differenzen

$$- \frac{\partial F}{\partial q_{s_1}} + \frac{\partial \vartheta_{s_1}}{\partial t} \quad \text{und} \quad - \frac{\partial \vartheta_{s_2}}{\partial q_{s_1}} + \frac{\partial \vartheta_{s_1}}{\partial q_{s_2}} \qquad (s_1, s_2 = 1, \dots \sigma)$$

nur von $t, q_1, \dots q_\sigma$ abhängen.

Wir sehen somit, daß, wenn die Differentialgleichungssysteme (51.) und (52.) von $p_1, \dots p_\varrho$, das erste außerdem noch von $p'_1 \dots p'_\varrho$ unabhängig sein soll, die notwendige und hinreichende Form des kinetischen Potentials durch

$$\begin{aligned}
H = &\sum_{\substack{r,s \\ r=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma}} \varphi_{rs}(t, q_1, \dots q_\sigma) p'_r q'_s + \sum_{\substack{m,n \\ m,n=1,\dots\sigma}} \psi^{(0)}_{mn}(t, q_1, \dots q_\sigma) q'_m q'_n \\
&+ \sum_{r_1=1,\dots\varrho} \chi_{r_1}(t, p_1, \dots q_1, \dots) p'_{r_1} + \sum_{s=1,\dots\sigma} \vartheta_s(t, p_1, \dots q_1, \dots) q'_s + F(t, p_1, \dots q_1, \dots)
\end{aligned} \qquad (62.)$$

gegeben ist, worin die Differenzen

$$\frac{\partial \chi_{r_1}}{\partial p_r} - \frac{\partial \chi_r}{\partial p_{r_1}}, \quad - \frac{\partial F}{\partial p_r} + \frac{\partial \chi_r}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial p_r} - \frac{\partial \chi_r}{\partial q_s}, \quad - \frac{\partial F}{\partial q_s} + \frac{\partial \vartheta_s}{\partial t}, - \frac{\partial \vartheta_{s_1}}{\partial q_s} + \frac{\partial \vartheta_s}{\partial q_{s_1}}$$

$(r, r_1 = 1, \dots \varrho;\ s, s_1 = 1, \dots \sigma)$

nur von $t, q_1, \dots q_\sigma$ abhängen dürfen, und die ersten dieser Ausdrücke die Koeffizienten der Größen p'_{r_1} in der $r$ten Gleichung des *Lagrange*schen Systems (51.) darstellen.

Berechnet man nun aus dem Gleichungssysteme (60.) die Größen $p_1', \dots p_\varrho'$ als Funktionen von $t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots$ und setzt diese Werte in das System (61.) ein, so erhält man σ Differentialgleichungen dritter Ordnung in den Variabeln $q_1, \dots q_\sigma$, welche im allgemeinen kein kinetisches Potential besitzen werden, was an einem speziellen Falle zu zeigen genügt.

Setzen wir nämlich

$$\varrho = 2, \quad \sigma = 1, \quad F = 0, \quad \chi_1 = \frac{1}{3} q_1^3 + q_1 + p_1 p_2 + \frac{1}{2} p_2^2 + 3 p_2,$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} p_1^2 + p_1 p_2, \quad \vartheta_1 = p_1 + q_1,$$

so sind die oben aufgestellten Bedingungen sämtlich erfüllt und das kinetische Potential nimmt nach (62.) die Form an

$$H = \varphi_{11}(t, q_1) p_1' q_1 + \varphi_{21}(t, q_1) p_2' q_1 + \psi_{11}^{(0)}(t, q_1) q_1'^2 + \left(\frac{1}{3} q_1^3 + q_1 + p_1 p_2 + \frac{1}{2} p_2^2 + 3 p_2\right) p_1'$$
$$+ \left(\frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} p_1^2 + p_1 p_2\right) p_2' + (p_1 + q_1) q_1',$$

worin die φ und ψ beliebig gewählt werden dürfen; es wird H die Parameter p_1 und p_2 enthalten, wiewohl sie aus den μ *Lagrange*schen Gleichungen herausfallen. Dieses kinetische Potential können wir durch Abziehen des vollständigen nach t genommenen Differentialquotienten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} p_1^2 p_2 + \frac{1}{2} p_1 p_2^2\right) = \left(p_1 p_2 + \frac{1}{2} p_2^2\right) p_1' + \left(\frac{1}{2} p_1^2 + p_1 p_2\right) p_2'$$

auf die einfachere Form bringen

$$H = \varphi_{11}(t, q_1) p_1' q_1 + \varphi_{21}(t, q_1) p_2' q_1 + \psi_{11}^{(0)}(t, q) q_1'^2 + \left(\frac{1}{3} q_1^3 + q_1 + 3 p_2\right) p_1' + (p_1 + q_1) q_1',$$

und spezialisieren wir dasselbe noch weiter dadurch, daß wir $\varphi_{11} = \varphi_{21} = \psi_{11}^{(0)} = 1$ setzen, so wird das Differentialgleichungssystem (51.) in

$$q_1^2 q_1' + q_1' + 3 p_2' = 0 \quad \text{und} \quad 3 p_1' + q_1' = 0$$

übergehen, so daß die hieraus entnommenen Werte von p_1' und p_2' in die *Lagrange*sche Gleichung (52.)

$$2 q_1'' - (q_1^2 + 1) p_1' - p_2' = 0$$

eingesetzt, das Eliminationsresultat zweiter Ordnung liefern

$$q_1'' + \frac{1}{3}(q_1^2 + 1)\, q_1' = 0,$$

welches den Bedingungen (7.) zufolge die *Lagrange*sche Form nicht besitzt — es wird somit auch im allgemeinen die oben durchgeführte Elimination nicht auf *Lagrange*sche Gleichungen führen.

Wir finden somit, *daß, wenn die Gleichungssysteme* (51.) *und* (52.) *die Parameter* $p_1, \dots p_\varrho$, *und ersteres auch* $p_1'', \dots p_\varrho''$ *nicht enthalten, die Eliminationsgleichungen in den* q *die Lagrangesche Form im allgemeinen nicht besitzen.*

Fehlen

III. in den Differentialgleichungen (51.) die Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ und deren erste Ableitungen, so ergeben den früheren ganz analoge Ausführungen für das kinetische Potential die Form

$$H = \sum_{\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1 = 1, \dots \varrho} \omega_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}(t)\, p_{\mathfrak{r}}' p_{\mathfrak{r}_1}' + \sum_{r=1,\dots\varrho;\ s=1,\dots\sigma} \varphi_{rs}(t, q_1, \dots q_\sigma)\, p_r' q_s' + \sum_{s, s_1 = 1, \dots \sigma} [\psi_{ss_1}^{(1)}(t, q_1, \dots)\, p_1$$
$$+ \dots + \psi_{ss_1}^{(\varrho)}(t, q_1, \dots)\, p_\varrho + \psi_{ss_1}^{(0)}(t, q_1, \dots)] q_s' q_{s_1}' + \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho} \chi_{r_1}(t, p_1, \dots q_1, \dots)\, p_{r_1}'$$
$$+ \sum_{s=1,\dots\sigma} \vartheta_s(t, p_1, \dots q_1, \dots) q_s' + F(t, p_1, \dots q_1, \dots),$$

worin die Differenzen

$$-\frac{\partial F}{\partial p_r} + \frac{\partial \chi_r}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial p_r} - \frac{\partial \chi_r}{\partial q_s}$$

nur von $t, q_1, \dots q_\sigma$ abhängen, und

$$\frac{\partial \chi_r}{\partial p_\mathfrak{r}} - \frac{\partial \chi_\mathfrak{r}}{\partial p_r} = -\frac{\partial \omega_{r\mathfrak{r}}}{\partial t}$$

ist; in der Tat geht dann das System (51.) in das von $p_1, \dots p_\varrho$ und deren ersten Ableitungen freie Differentialgleichungssystem

$$-\sum_{s, s_1 = 1, \dots \sigma} \psi_{ss_1}^{(r)}(t, q_1, \dots)\, q'\ q_{s_1}' - \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho} \frac{\partial \chi_{r_1}}{\partial p_r} p_{r_1}' - \sum_{s=1,\dots\sigma} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial p_r}\, q_s' - \frac{\partial F}{\partial p_r}$$
$$+ \frac{d}{dt}\left\{ \sum_{\mathfrak{r}_1 = 1, \dots \varrho} \omega_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}(t) p_{\mathfrak{r}_1}' + \sum_{s=1,\dots\sigma} \varphi_{rs}(t, q_1, \dots) q_s' + \chi_r(t, p_1, \dots q_1, \dots) \right\} = P_r \qquad (r = 1, \dots \varrho)$$

über, aus denen sich die in den zweiten Ableitungen der q linearen, in deren ersten Ableitungen quadratischen Werte

$$p_r'' = \omega_r(t, q_1, \dots q_1', \dots q_1'', \dots) \tag{63.}$$

ergeben werden.

Fügt man die weitere, für die algebraische Elimination der p notwendige Bedingung hinzu, daß auch das System (52.) von $p_1, \dots p_\varrho, p_1', \dots p_\varrho'$ unabhängig sei, so findet man leicht aus den eben gewonnenen Resultaten, daß die notwendige und hinreichende Form des kinetischen Potentials für die Bedingung, daß die Differentialgleichungssysteme (51.) und (52.) $p_1, \dots p_\varrho$, $p_1', \dots p_\varrho'$ nicht enthalten, durch

$$\begin{aligned} H = {} & \sum_{\mathfrak{r},\mathfrak{r}_1=1,\dots\varrho} \omega_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}(t) p_{\mathfrak{r}}' p_{\mathfrak{r}_1}' + \sum_{r=1,\dots\varrho;\ s_1=1,\dots\sigma} \varphi_{rs_1}(t, q_1, \dots) p_r' q_{s_1}' + \sum_{s_1,s_2=1,\dots\sigma} \psi^{(0)}_{s_1 s_2}(t, q_1, \dots)\, q_{s_1}' q_{s_2}' \\ & + \sum_{r_1=1,\dots\varrho} \chi_{r_1}(t, p_1, \dots q_1, \dots) p_{r_1}' + \sum_{s_1=1,\dots\sigma} \vartheta_{s_1}(t, p_1, \dots q_1, \dots) q_{s_1}' + F(t, p_1, \dots q_1, \dots) \end{aligned} \tag{64.}$$

gegeben ist, worin die Differenzen

$$-\frac{\partial F}{\partial p_r} + \frac{\partial \chi_r}{\partial t}, \quad -\frac{\partial F}{\partial q_s} + \frac{\partial \vartheta_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vartheta_{s_1}}{\partial q_s} - \frac{\partial \vartheta_s}{\partial q_{s_1}}$$

nicht von den Parametern $p_1, \dots p_\varrho$ abhängen, und die Gleichungen

$$\frac{\partial \chi_r}{\partial p_{\mathfrak{r}}} - \frac{\partial \chi_{\mathfrak{r}}}{\partial p_r} = -\frac{\partial \omega_{r\mathfrak{r}}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{r}s_1}}{\partial q_s} = \frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial q_{s_1}}, \quad \frac{\partial \chi_{\mathfrak{r}}}{\partial q_s} - \frac{\partial \vartheta_s}{\partial p_{\mathfrak{r}}} = \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{r}s}}{\partial t}$$

identisch befriedigt sind, wodurch leicht eine Vereinfachung des Ausdrucks (64.) durch Subtraktion eines nach t genommenen vollständigen Differentialquotienten ermöglicht wird.

Soll das kinetische Potential die Zeit t nicht explizite enthalten, so werden die Funktionen $\omega_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1}(t)$ Konstanten,

$$F = \sum_{r=1,\dots\varrho} C_r p_r + F_1(q_1, \dots q_\sigma),$$

worin auch C_r konstant, und die übrigen Funktionen den Bedingungen unterworfen sein

$$\frac{\partial \chi_r}{\partial p_{\mathfrak{r}}} = \frac{\partial \chi_{\mathfrak{r}}}{\partial p_r}, \quad \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{r}s_1}}{\partial q_s} = \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{r}s}}{\partial q_{s_1}}, \quad \frac{\partial \chi_{\mathfrak{r}}}{\partial q_s} = \frac{\partial \vartheta_s}{\partial p_{\mathfrak{r}}},$$

während

$$\frac{\partial \vartheta_{s_1}}{\partial q_s} - \frac{\partial \vartheta_s}{\partial q_{s_1}}$$

von $p_1, \dots p_\varrho$ unabhängig ist; ist die letztere Differenz gleich Null, so bildet der auf die χ und ϑ bezügliche Summenteil von (64.) einen vollständigen nach t genommenen Differentialquotienten, und es wird somit dann das kinetische Potential in die Form

$$H = \sum_{r, r_1 = 1, \dots \varrho} c_{r r_1} p'_r p'_{r_1} + \sum_{r = 1, \dots \varrho;\ s_1 = 1, \dots \sigma} \varphi_{r s_1}(q_1, \dots)\, p'_r q'_{s_1} + \sum_{s_1, s_2 = 1, \dots \sigma} \psi^{(0)}_{s_1 s_2}(q_1, \dots)\, q'_{s_1} q'_{s_2}$$
$$+ \sum_{r = 1, \dots \varrho} C_r p_r + F_1(q_1, \dots q_\sigma)$$

und das System (51.) in

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{r_1 = 1, \dots \varrho} c_{r r_1} p'_{r_1} + \sum_{s_1 = 1, \dots \sigma} \varphi_{r s_1}(q_1, \dots)\, q'_{s_1} \right) = P_r - C_r \qquad (r = 1, \dots \varrho)$$

übergehen.

Da nun die Substitution der Werte p''_r aus Gleichung (63.) in das Gleichungssystem (52.) wiederum σ in $q''_1, \dots q''_\sigma$ lineare und in $q'_1, \dots q'_\sigma$ quadratische Gleichungen liefert, so wird man für die Frage, ob dieselben die *Lagrange*sche Form besitzen, diese nur für eine p- und zwei q-Gleichungen zu beantworten brauchen, da eine sukzessive Elimination von $p_1, p_2, \dots p_\varrho$ immer wieder zu demselben Problem führt.

Sei also $\varrho = 1$ und $\sigma = 2$, so wird, wie oben gefunden, wenn wir der Kürze halber annehmen, daß $P_1 = P_2 = 0$ und t nicht explizite in H vorkommen soll, das kinetische Potential die Form haben

$$H = \frac{1}{2} p''^2_1 + p'_1\left(\varphi_{11}(q_1, q_2) q'_1 + \varphi_{12}(q_1, q_2) q'_2\right) + \psi_{11}(q_1, q_2) q''^2_1 + 2\psi_{12}(q_1, q_2) q'_1 q'_2$$
$$+ \psi_{22}(q_1, q_2) q''^2_2 + \chi_1(p_1, q_1, q_2) p'_1 + \vartheta_1(p_1, q_1, q_2) q'_1 + \vartheta_2(p_1, q_1, q_2) q'_2 + C_1 p_1 + F_1(q_1, q_2),$$

worin

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial q_2} = \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial q_2} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial p_1},$$

und die Differenz $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial q_1}$ von p_1 unabhängig ist. Setzt man den aus der zu p_1 gehörigen *Lagrange*schen Gleichung sich ergebenden Wert

$$p_1'' = -\varphi_{11} q_1'' - \varphi_{12} q_2'' - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial q_1} q_1'^2 - 2 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial q_2} q_1' q_2' - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial q_2} q_2'^2 + C_1$$

in die beiden anderen Differentialgleichungen (52.) ein, so gibt eine leichte Rechnung die Gleichungen

$$(2\psi_{11} - \varphi_{11}^2) q_1'' + (2\psi_{12} - \varphi_{11}\varphi_{12}) q_2'' + \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_1} - \varphi_{11} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial q_1}\right) q_1'^2 + 2\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_2} - \varphi_{11} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial q_2}\right) q_1' q_2'$$
$$+ \left(2\frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_1} - \varphi_{11} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial q_2}\right) q_2'^2 + q_2'\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial q_1} + C_1 \varphi_{11} = 0,$$

$$(2\psi_{12} - \varphi_{11}\varphi_{12}) q_1'' + (2\psi_{22} - \varphi_{12}^2) q_2'' + \left(2\frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_2} - \varphi_{12} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial q_1}\right) q_1'^2$$
$$+ 2\left(\frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_1} - \varphi_{12} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial q_2}\right) q_1' q_2' + \left(\frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_2} - \varphi_{12} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial q_2}\right) q_2'^2 - q_1'\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial q_2} + C_1 \varphi_{12} = 0,$$

und die Vergleichung derselben mit (17.) zeigt unmittelbar, daß die für die Gestalt *Lagrange*scher Gleichungen notwendigen und hinreichenden Bedingungen (19.), (21.), (22.) und (23.) identisch erfüllt sind. Wir finden somit,

daß, wenn in den Differentialgleichungssystemen (51.) *und* (52.) *die Parameter* $p_1, \ldots p_\varrho$ *und deren erste Ableitungen fehlen, die Elimination der zweiten Ableitungen dieser Parameter auf* σ *Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Parametern* $q_1, \ldots q_\sigma$ *führt, welche die Form Lagrangescher Gleichungen für ein kinetisches Potential erster Ordnung besitzen.**)

---

*) Mit Rücksicht auf die nachfolgenden Untersuchungen mag zunächst hervorgehoben werden, daß, wenn das kinetische Potential (64.) die Zeit nicht explizite enthielt, vermöge der oben für die Koeffizienten angegebenen Bedingungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \sum_{r_1=1}^{\varrho} \frac{\partial \chi_{r_1}}{\partial p_r} p_{r_1}' + \sum_{s_1=1}^{\sigma} \frac{\partial \vartheta_{s_1}}{\partial p_r} q_{s_1}' + C_r = \sum_{r_1=1}^{\varrho} \frac{\partial \chi_r}{\partial p_{r_1}} p_{r_1}' + \sum_{s_1=1}^{\sigma} \frac{\partial \chi_r}{\partial q_{s_1}} q_{s_1}' + C_r$$

folgt, und daher das Gleichungssystem (51.) durch Integration in

$$\frac{\partial H}{\partial p_r'} = \chi_r + C_r t + \int P_r dt + c_r \qquad (r = 1, \ldots \varrho)$$

übergeht, worin c_r Integrationskonstanten bedeuten — ein Fall, auf den wir später wieder bei der durch unmittelbar ersichtliche Integrationen ausführbaren Elimination von Parametern zurückkommen werden. Aus dieser letzten, von $p_1, \ldots p_\varrho$ freien Gleichung ist aber ersichtlich, daß sich $p_1', p_2', \ldots p_\varrho'$ durch $q_1, \ldots q_\sigma$ und deren erste Ableitungen ausdrücken lassen, und man würde, wenn man diese Werte in H substituierte, für (H) eine Funktion erster Ordnung in $q_1, \ldots q_\sigma$ erhalten, welche jedoch wegen Einführung der Integrationskonstanten nicht mehr das, wie oben bewiesen worden, tatsächlich existierende

Nachdem wir die Elimination der Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ in den Fällen behandelt, in denen je zwei von den Gruppen der Größen p_r, p_r', p_r'' in den zu den p gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen fehlen, muß noch die Frage erörtert werden, wie es sich mit den Eliminationsgleichungen in den Parametern $q_1, \dots q_\sigma$ verhält, wenn jene Gruppen entweder nur in den zu den q gehörigen Differentialgleichungen (52.) oder zum Teil in den zu den p, zum Teil in den zu den q gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen fehlen.

Mögen zunächst die Größen $p_1', \dots p_\varrho', p_1'', \dots p_\varrho''$ in den zu den Parametern $q_1, \dots q_\varrho$ gehörigen Differentialgleichungen (52.) nicht enthalten sein,

---

kinetische Potential erster Ordnung der durch Elimination der $p_1, \dots p_\varrho$ erhaltenen Eliminationsgleichungen in $q_1, \dots q_\sigma$ wäre, welche die *Lagrange*sche Form besaßen. Sei z. B. — ganz unabhängig von dem oben behandelten Falle — das kinetische Potential erster Ordnung der Parameter p und q

$$H = q + q^2 p' + q' + q' p' + \frac{1}{2} p'^2 + q^2 q'^2$$

gegeben, so daß die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen, wenn $P = Q = 0$ vorausgesetzt wird,

$$\frac{d}{dt}(q^2 + q' + p') = 0 \quad \text{und} \quad 2q^2 q'' + p'' + 2q^4 q'^2 - 2qp' - 1 = 0$$

lauten, so wird der aus der ersten durch Integration hergeleitete Wert

$$p' = c - q^2 - q',$$

in die zweite substituiert, die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2q^2 - 1)q'' + 2qq'^2 - 2q(c - q^2) - 1 = 0$$

liefern, während derselbe das kinetische Potential H in

$$(H) = q^2 q'^2 - \frac{1}{2} q'^2 - q^2 q' + q' - \frac{1}{2} q^4 + q + \frac{1}{2} c^2$$

überführt. Man sieht aber leicht, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung in q eine *Lagrange*sche Gleichung für das kinetische Potential erster Ordnung

$$K = q^2 q'^2 - \frac{1}{2} q'^2 - \frac{1}{2} q^4 + q + cq^2$$

ist, während die zu (H) gehörige *Lagrange*sche Gleichung

$$(2q^2 - 1)q'' + 2qq'^2 + 2q^3 - 1 = 0$$

lautet, und sonach mit der oben gefundenen Eliminationsgleichung zweiter Ordnung in q nur für $c = 0$ zusammenfällt.

so wird die Differentiation dieser Gleichungen nach p'_r und p''_r durch ähnliche Transformationen wie oben für das kinetische Potential die notwendige und hinreichende Form liefern

$$
\begin{aligned}
H = & \sum_{s_1, s_2 = 1, \dots \sigma} \varphi_{s_1 s_2}(t, q_1, \cdots q_\sigma)\, q'_{s_1} q'_{s_2} + \sum_{r_1, r_2 = 1, \dots \varrho} \psi_{r_1 r_2}(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_{\varrho+1}, \cdots q_\sigma)\, p'_{r_1} p'_{r_2} \\
& + \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho;\ s_1 = \varrho+1, \dots \sigma} \omega_{r_1 s_1}(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_{\varrho+1}, \cdots q_\sigma)\, p'_{r_1} q'_{s_1} + \sum_{s_1 = 1, \dots \varrho} \varphi_{s_1}(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_1, \cdots q_\sigma)\, q'_{s_1} \\
& + \sum_{s_2 = \varrho+1, \dots \sigma} \psi_{s_2}(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_1, \cdots q_\sigma)\, q'_{s_2} + \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho} \omega_{r_1}(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_1, \cdots q_\sigma)\, p'_{r_1} \\
& + F(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_1 \cdots q_\sigma),
\end{aligned}
\tag{65.}
$$

worin

$$
\frac{\partial \omega_r}{\partial q_s} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial p_r} \qquad (r, s = 1, 2, \dots \varrho)
$$

ist, und in der Tat werden dann, ohne daß wir erst den Ausdruck (65.) durch Subtraktion von nach t genommenen vollständigen Differentialquotienten vereinfachen, die ersten ϱ Gleichungen des Systems (52.)

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{s_1, s_2 = 1, \dots \sigma} \frac{\partial \varphi_{s_1 s_2}}{\partial q_s}\, q'_{s_1} q'_{s_2} - \sum_{s_1 = 1, \dots \varrho} \frac{\partial \varphi_{s_1}}{\partial q_s}\, q'_{s_1} - \sum_{s_2 = \varrho+1, \dots \sigma} \frac{\partial \psi_{s_2}}{\partial q_s}\, q'_{s_2} - \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho} \frac{\partial \omega_{r_1}}{\partial q_s}\, p'_{r_1} - \frac{\partial F}{\partial q_s} \\
& + \frac{d}{dt}\Big(\sum_{s_2 = 1, \dots \sigma} \varphi_{s s_2}\, q'_{s_2} + \varphi_s\Big) = Q_s \qquad (s = 1, 2, \dots \varrho)
\end{aligned}
$$

vermöge der angegebenen Bedingung zwischen ω_r und φ_s von $p'_1, \dots p'_\varrho, p''_1, \dots p''_\varrho$ unabhängig sein.

Die aus diesen ϱ Gleichungen hergeleiteten Werte

$$
p_r = f_r(t, q_1, \cdots q_\sigma, q'_1, \cdots q'_\sigma, q''_1, \cdots q''_\sigma) \tag{66.}
$$

und deren nach t genommenen ersten und zweiten Ableitungen werden nun, in die zu den Parametern $p_1, \dots p_\varrho, q_{\varrho+1}, \dots q_\sigma$ gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen substituiert, σ Differentialgleichungen in den Parametern $q_1, \dots q_\sigma$ von der vierten Ordnung liefern, welche in den vierten Differentialquotienten linear sind, während dieselben Substitutionen, wie unmittelbar zu sehen, das kinetische Potential in eine Funktion dritter Ordnung dieser Parameter verwandeln, in welcher die dritten Differentialquotienten im allgemeinen quadratisch vorkommen werden, so daß also das Differentialgleichungssystem vierter Ordnung nur ein Integralgleichungssystem der zu (H) gehörigen

*Lagrange*schen Gleichungen sechster Ordnung liefern wird. Um nun nachzuweisen, *daß das durch Elimination hergeleitete System vierter Ordnung im allgemeinen kein kinetisches Potential zweiter oder dritter Ordnung besitzt*, wird es nur nötig sein, dies an einem speziellen Falle zu verifizieren. Sei für zwei Parameter q und p das kinetische Potential gegeben

$$H = pp'^2 + q'^2 + pq,$$

so wird, wenn $P = Q = 0$ angenommen werden, die zu q gehörige *Lagrange*sche Gleichung

$$p - 2q'' = 0$$

p' und p'' nicht enthalten, und der Wert von p in die zu p gehörige Gleichung

$$-q + 2pp'' + p'^2 = 0$$

eingesetzt, die gesuchte Differentialgleichung vierter Ordnung in q

$$-q + 8q''q'''' + 4q'''^2 = 0$$

liefern, während das transformierte kinetische Potential

$$(H) = 8q''q'''^2 + 2qq'' + q'^2$$

lautet. Die zu (H) gehörige *Lagrange*sche Gleichung

$$8q''q^{(VI)} + 24q'''q^{(V)} + 16q''''^2 - q'' = 0$$

hat, wie unmittelbar zu sehen, jene Differentialgleichung vierter Ordnung zum Integral, diese selbst aber hat nicht die *Lagrange*sche Form, weil sie sonst ein kinetisches Potential zweiter Ordnung besitzen müßte — ein solches dritter Ordnung ohne eines zweiter Ordnung kann sie nach einer früheren Anmerkung nicht haben —, die linke Seite dieser Gleichung aber der Bedingungsgleichung (39.) nicht identisch genügt.

Fügt man zu der Annahme, daß in den zu $q_1, \dots q_\varrho$ gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen $p_1', \dots p_\varrho', p_1'', \dots p_\varrho''$ fehlen sollen, noch die Bedingung hinzu, daß außerdem in all den übrigen σ Gleichungen die Größen $p_1'', \dots p_\varrho''$ nicht enthalten sind, so findet man wieder leicht, daß das kinetische Potential H in (65.) die Form annimmt

$$
\begin{aligned}
H = & \sum_{s_1, s_2 = 1, \dots \sigma} \varphi_{s_1 s_2}(t, q_1, \dots q_\sigma)\, q'_{s_1} q'_{s_2} + \sum_{s_1 = 1, \dots \varrho} \varphi_{s_1}(t, p_1, \dots p_\varrho, q_1, \dots q_\sigma)\, q'_{s_1} \\
& + \sum_{s_2 = \varrho+1, \dots \sigma} \psi_{s_2}(t, p_1, \dots p_\varrho, q_1, \dots q_\sigma)\, q'_{s_2} + \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho} \omega_{r_1}(t, p_1, \dots p_\varrho, q_1, \dots q_\sigma)\, p'_{r_1} \\
& + F(t, p_1, \dots p_\varrho, q_1, \dots q_\sigma)
\end{aligned} \tag{67.}
$$

mit den identisch zu erfüllenden Bedingungen

$$
\frac{\partial \omega_r}{\partial q_s} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial p_r}, \qquad (r, s = 1, 2, \dots \varrho)
$$

und es wird somit die Substitution des Ausdruckes (66.) in H für (H) eine in $q'''_1, \dots q'''_\sigma$ lineare Funktion dritter Ordnung liefern, für welche die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen im allgemeinen von der fünften Ordnung sein werden. Da aber die zu $p_1, \dots p_\varrho, q_{\varrho+1}, \dots q_\sigma$ gehörigen Differentialgleichungen, wie aus (67.) ersichtlich, die Größen $p'_1, \dots p'_\varrho$ linear enthalten, *so werden die durch Substitution von* (66.) *resultierenden Differentialgleichungen in den Parametern* $q_1, \dots q_\sigma$ *im allgemeinen von der dritten Ordnung linear sein, so daß die* σ *Eliminationsgleichungen dritter Ordnung in den* q *nur Integrale der zu dem kinetischen Potentiale* (H) *dritter Ordnung gehörigen Lagrangeschen Gleichungen fünfter Ordnung sein werden — doch können dieselben in speziellen Fällen auch die Lagrangesche Form besitzen.*

So wird z. B. für das kinetische Potential von zwei Parametern

$$
H = q q'^2 + p q + p^2
$$

die zu q gehörige *Lagrange*sche Gleichung

$$
q'^2 - p + 2 q q'' = 0
$$

von p' und p'' frei sein, und der hieraus sich ergebende Wert von p in die zu p gehörige *Lagrange*sche Gleichung

$$
2p + q = 0,
$$

welche wiederum selbst p'' nicht enthält, eingesetzt, die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$
4 q q'' + 2 q'^2 + 2 q = 0
$$

liefern, während das kinetische Potential durch die Substitution von p in

$$(H)=4q^2q''^2+4qq'^2q''+2q^2q''+q'^4+2qq'^2$$

übergeht. Da aber die zu (H) gehörige *Lagrange*sche Gleichung

$$-2qq''-q'^2-10q'^2q''-12qq''^2-4q^2q''''-16qq'q'''=0$$

lautet, so muß, wie man auch sogleich verifiziert, die obige Eliminationsgleichung zweiter Ordnung in q ein Integral dieser sein; aber jene Gleichung hat auch selbst wieder das kinetische Potential erster Ordnung

$$H=qq'^2-\frac{1}{4}q^2,$$

was schon daraus ersichtlich, daß dieses Beispiel auch dem oben behandelten Falle I. angehört.

Für den allein noch übrig bleibenden Fall, in dem die ersten und zweiten Ableitungen einer Anzahl von Parametern des Problems zum Teil in den zu diesen Parametern gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen, zum Teil in den anderen, nicht zu ihnen gehörigen Differentialgleichungen fehlen, kann man ebenso leicht die Form des kinetischen Potentials aufstellen und schließen, *daß die Elimination wiederum auf ein Differentialgleichungssystem vierter Ordnung führt, während das transformierte kinetische Potential von der dritten Ordnung wird, und daß somit ohne weitere beschränkende Annahmen die durch die Elimination erhaltenen Differentialgleichungen nicht die Form Lagrangescher Gleichungen besitzen werden.*

So wird sich unter der Annahme, daß von vier Parametern p_1, p_2, q_1, q_2 in den zu p_1 und q_1 gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen die Größen p_1', p_1'', p_2', p_2'' nicht enthalten sein sollen, für das kinetische Potential die notwendige und hinreichende Form ergeben

$$\begin{aligned}H=&\varphi_{22}(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,p_2'^2+\psi_{11}(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,q_1'^2+\psi_{22}(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,q_2'^2\\&+\omega_1(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,p_1'q_2'+\omega_2(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,p_2'q_2'+\omega_3(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,q_1'q_2'\\&+\varphi_1(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,p_1'+\varphi_2(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,p_2'+\psi_1(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,q_1'\\&+\psi_2(t,p_1,p_2,q_1,q_2)\,q_2'+F(t,p_1,p_2,q_1,q_2),\end{aligned}$$

deren Koeffizienten den Bedingungen unterworfen sind

$$\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial p_1}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial q_1}=0,\quad \frac{\partial\psi_{11}}{\partial p_1}=0,\quad \frac{\partial\psi_{11}}{\partial p_2}=0,\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}=\frac{\partial\omega_2}{\partial p_1},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}=\frac{\partial\omega_3}{\partial p_1},$$

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial q_1}=\frac{\partial\omega_3}{\partial p_2},\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_2}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1},\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}=\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}=\frac{\partial\psi_1}{\partial p_2}.$$

Daß aber die Elimination von p_1 und p_2 im allgemeinen nicht mehr *Lagrange*sche Gleichungen vierter Ordnung in q_1 und q_2 liefert, wird aus dem Beispiel ersichtlich sein, in welchem das kinetische Potential durch den Ausdruck

$$H=p_2'^2+q_1'^2+p_1'q_2'+q_1'q_2'+\frac{1}{2}p_1^2+q_1p_2+q_2$$

gegeben ist, der den aufgestellten Bedingungsgleichungen Genüge leistet; setzt man nämlich aus den zu p_1 und q_1 gehörigen, von p_1', p_2', p_1'', p_2'' freien *Lagrange*schen Gleichungen

$$p_1=q_2'' \quad \text{und} \quad p_2=2q_1''+q_2''$$

die Werte von p_1 und p_2 in die beiden anderen zu p_2 und q_2 gehörigen Differentialgleichungen

$$2p_2''=q_1 \quad \text{und} \quad p_1''+q_1''=1$$

ein, so ergibt sich als Eliminationsresultat das Differentialgleichungssystem in q_1 und q_2

$$4q_1''''+2q_2''''-q_1=0 \quad \text{und} \quad q_2''''+q_1''-1=0,$$

während das kinetische Potential in den Ausdruck dritter Ordnung übergeht

$$(H)=4q_1'''^2+4q_1'''q_2'''+q_2'''^2+q_2'q_2'''+\frac{1}{2}q_2'''^2+q_1(2q_1''+q_2'')+q_1'^2+q_1'q_2'+q_2.$$

Den zu diesem (H) gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen sechster Ordnung genügen nun, wie leicht ersichtlich, die oben gefundenen Eliminationsgleichungen vierter Ordnung, die jedoch selbst nach den früher entwickelten Bedingungen kein kinetisches Potential zweiter Ordnung besitzen.

§ 5.

Nachdem mit Hilfe von Voraussetzungen, welche für eine Gruppe *Lagrange*scher Gleichungen eines zu einem kinetischen Potential erster Ordnung gehörigen Differentialgleichungssystems gemacht wurden, die Form dieses Potentials bestimmt worden, für welche die zu jener Gruppe gehörigen Parameter durch algebraische oder durch Differentiation herstellbare Eliminationsprozesse sich herausschaffen ließen, soll die Frage der Reduktion der

*Lagrange*schen Gleichungen auf eine geringere Anzahl derselben noch von dem Gesichtspunkte aus erörtert werden, daß zwischen diesen Gleichungen eine Elimination von Parametern mit Hilfe von unmittelbar ersichtlichen Integrationen sich ermöglichen läßt.

Wird zunächst angenommen, daß die linken Seiten der Differentialgleichungen (51.), in denen P_r Funktionen von t oder Konstanten sein mögen, sich identisch als nach t genommene totale Differentialquotienten von ϱ, wiederum von $t, p_1, \dots p_\varrho, p'_1, \dots p'_\varrho, q_1, \dots q_\sigma, q'_1, \dots q'_\sigma$ abhängigen Funktionen K_r darstellen lassen, also

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r} \equiv \frac{d}{dt}\left(K_r - \frac{\partial H}{\partial p'_r}\right) \qquad (r=1,\dots\varrho)$$

ist, so würde folgen, daß, weil die linke Seite nur die ersten Ableitungen aller Parameter enthält, der Klammerausdruck nur von t und den Parametern selbst abhängt, oder

$$K - \frac{\partial H}{\partial p'_r} = -f_r(t, p_1, \dots p_\varrho, q_1, \dots q_\sigma)$$

ist, und somit

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{df_r}{dt} \qquad (68.)$$

in den ersten Ableitungen sämtlicher Parameter linear sein muß. Die Voraussetzung der identisch befriedigten Gleichungen (68.) liefert aber die Beziehungen

$$\frac{\partial f_r}{\partial p_\mathfrak{r}} - \frac{\partial f_\mathfrak{r}}{\partial p_r} = \varkappa_{r\mathfrak{r}}, \qquad (69.)$$

worin $\varkappa_{r\mathfrak{r}} = -\varkappa_{\mathfrak{r}r}$ Konstanten bedeuten und $\varkappa_{rr} = 0$ ist, und unterwirft man nun eine Funktion $\varphi\ (t, p_1, \dots p_\varrho, q_1, \dots q_\sigma)$ den Bedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_r} = f_r + \sum_{\mathfrak{r}=1}^{\varrho} \lambda_{r\mathfrak{r}} p_\mathfrak{r} + \omega_r(t), \qquad (r=1,\dots\varrho)$$

worin $\lambda_{r\mathfrak{r}} = -\lambda_{\mathfrak{r}r} = \frac{1}{2}\varkappa_{r\mathfrak{r}}$, und $\omega_r(t)$ beliebige Funktionen von t sind, so ist die Bestimmung einer solchen Funktion φ möglich, da wegen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_r \partial p_\mathfrak{r}} = \frac{\partial f_r}{\partial p_\mathfrak{r}} + \lambda_{r\mathfrak{r}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\mathfrak{r} \partial p_r} = \frac{\partial f_\mathfrak{r}}{\partial p_r} + \lambda_{\mathfrak{r}r}$$

nach (69.) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Leitet man nun aus dem Werte von φ den den Gleichungen (68.) genügenden Wert des kinetischen Potentials in der Form ab

$$H = \frac{d\varphi}{dt} - \sum_{r,\mathfrak{r}=1,\dots\varrho} p_r \left(\lambda_{r\mathfrak{r}} p'_\mathfrak{r} + \omega'_r(t)\right) + F(t, p'_1, \dots p'_\varrho, q_1, \dots q_\sigma, q'_1, \dots q'_\sigma),$$

worin F eine willkürliche Funktion der eingeschlossenen Größen ist, so kann man im vorliegenden Falle das kinetische Potential mit Weglassung des totalen nach t genommenen Differentialquotienten in der Gestalt annehmen

$$(70.)\quad H = -\sum_{r,\mathfrak{r}=1,\dots\varrho} p_r \left(\lambda_{r\mathfrak{r}} p'_\mathfrak{r} + \omega'_r(t)\right) + F(t, p'_1, \dots p'_\varrho, q_1, \dots q_\sigma, q'_1, \dots q'_\sigma),$$

für welches das Gleichungssystem (51.) in

$$\sum_{\mathfrak{r}=1}^{\varrho} \lambda_{r\mathfrak{r}} p'_\mathfrak{r} + \omega'_r(t) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{\mathfrak{r}=1}^{\varrho} \lambda_{\mathfrak{r}r} p_\mathfrak{r} + \frac{\partial F}{\partial p'_r}\right) = P_r \qquad (r=1,\dots\varrho)$$

übergeht, oder durch unmittelbar ausführbare Integration in

$$(71.)\qquad 2\sum_{\mathfrak{r}=1,\dots\varrho}^{\varrho} \lambda_{r\mathfrak{r}} p_\mathfrak{r} + \omega_r(t) + \frac{\partial F}{\partial p'_r} = \int P_r\, dt + c_r, \qquad (r=1,\dots\varrho)$$

worin c_r die Integrationskonstanten bedeuten.

Fügen wir nun noch die Bedingung hinzu, daß die *Lagrange*schen Gleichungen (51.) die Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ nicht enthalten sollen, so wird nach (71.) $\lambda_{r\mathfrak{r}} = 0$ sein müssen, und somit das kinetische Potential (70.) in

$$(72.)\qquad H = -\sum_{r=1}^{\varrho} \omega'_r(t)\, p_r + F(t, p'_1, \dots p'_\varrho, q_1, \dots q_\sigma, q'_1 \dots q'_\sigma),$$

und das Differentialgleichungssystem (71.) in

$$(73.)\qquad \omega_r(t) + \frac{\partial F}{\partial p'_r} = \int P_r\, dt + c_r \qquad (r=1,\dots\varrho)$$

übergehen, während das Differentialgleichungssystem (52.) die Form annimmt

$$(74.) \qquad -\frac{\partial F}{\partial q_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_s'}=Q_s, \qquad (s=1,\dots\sigma)$$

also selbst wieder $p_1,\dots p_\varrho$ nicht enthält. Um nun die Parameter $p_1,\dots p_\varrho$ oder vielmehr deren erste Ableitungen zu eliminieren, werden wir die Werte derselben aus (73.) in der Form darstellen

$$(75.) \qquad p_r'=\varphi_r(t,q_1,\dots q_\sigma,q_1',\dots q_\sigma')$$

und in (74.) einsetzen, so daß diese Substitution die Gleichungen

$$(76.) \qquad -\left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_s'}\right)=Q_s \qquad (s=1,\dots\sigma)$$

liefert. Da aber nach (73.)

$$\frac{\partial(F)}{\partial q_s}=\left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\frac{\partial F}{\partial p_r'}\right)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s}=\left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\int P_r\,dt-\omega_r(t)+c_r\right)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s},$$

$$\frac{\partial(F)}{\partial q_s'}=\left(\frac{\partial F}{\partial q_s'}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\frac{\partial F}{\partial p_r'}\right)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s'}=\left(\frac{\partial F}{\partial q_s'}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\int P_r\,dt-\omega_r(t)+c_r\right)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s'}$$

ist, so werden die Gleichungen (76.), wenn

$$(F)-\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\int P_r\,dt-\omega_r(t)+c_r\right)(p_r')=\overline{F}$$

gesetzt wird, die Form

$$-\frac{\partial \overline{F}}{\partial q_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{F}}{\partial q_s'}=Q_s$$

annehmen und somit *Lagrange*sche Gleichungen für das kinetische Potential $\overline{F}$ sein, welches wiederum von der ersten Ordnung ist. Wir finden somit,

daß, wenn die linken Seiten des Systems (51.) *nach t genommene vollständige Differentialquotienten sind und* $p_1,\dots p_\varrho$ *nicht explizite enthalten, die Elimination der Parameter p zwischen dem Gleichungssystem* (51.) *und* (52.) *auf* σ *zu einem kinetischen Potential erster Ordnung gehörige Lagrangesche Gleichungen in den Parametern* $q_1,\dots q_\sigma$ *führt.*

Für den Fall der verborgenen Bewegung macht *Helmholtz* die Annahme, daß das kinetische Potential erster Ordnung zunächst ein solches

wägbarer Massen sei und ferner die Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ selbst nicht explizite enthalte, so daß die oben gemachten Voraussetzungen durch diese Annahme befriedigt werden, indem wegen $\frac{\partial H}{\partial p_r} = 0$ die linken Seiten von (51.) in die vollständigen Differentialquotienten $\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'}$ übergehen, und die Integration derselben

$$\frac{\partial H}{\partial p_r'} = c_r \qquad (r = 1, \dots \varrho)$$

und somit nach der Eigenschaft des Potentials wägbarer Massen p_r' in (75.) als lineare ganze Funktion von $q_1', q_2', \dots q_\sigma'$ liefern wird; die Funktion F ist dann nach (72.) H, und das kinetische Potential der resultierenden q-Gleichungen

$$\overline{H} = (H) - \sum_{r=1}^{\varrho} \Big(\int P_r \, dt + c_r \Big)(p_r') \tag{77.}$$

besitzt dann außer den quadratischen Gliedern in $q_1', \dots q_\sigma'$ diese Ableitungen noch in linearer Form, was bei kinetischen Potentialen wägbarer Massen und Bedingungsgleichungen, welche die Zeit t nicht explizite enthalten, nicht eintreten kann. Wird also die Bewegung eines in den Parametern $q_1, \dots q_\sigma$ freien Systems wägbarer Massen durch ein Differentialgleichungssystem

$$-\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_s'} = Q_s \qquad (s = 1, \dots \sigma)$$

beschrieben, worin $\overline{H}$ eine Funktion von $q_1, \dots q_\sigma, q_1', \dots q_\sigma'$ ist, welche nicht nur in $q_1', \dots q_\sigma'$ quadratische, sondern auch lineare Glieder enthält, so schließt *Helmholtz*, daß diese Gleichungen das Eliminationsresultat von ϱ Parametern $p_1, \dots p_\varrho$ aus den Bewegungsgleichungen eines zu den Parametern $q_1, \dots q_\sigma, p_1, \dots p_\varrho$ gehörigen Gesamtsystems bilden, für welches das kinetische Potential H ein Potential wägbarer Massen ist, welches die Größen $p_1', \dots p_\varrho', q_1', \dots q_\sigma'$ nur in der zweiten Dimension enthält, und mittels dessen unter der Voraussetzung, daß H die Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ nicht explizite enthält, also $\frac{\partial H}{\partial p_r} = 0$ ist, sich die Größen $p_1', \dots p_\varrho'$ aus den *Lagrange*schen Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} = P_r$ berechnen und in die q-Gleichungen substituieren ließen, die dann in die obige Form für das kinetische Potential erster Ordnung $\overline{H}$ übergingen.

Es mag noch bemerkt werden, daß, wenn H ein kinetisches Potential wägbarer Massen mit nur quadratischen Gliedern in den Ableitungen der Parameter darstellt, die Voraussetzung, daß die *Lagrange*schen Gleichungen (51.) und (52.) die Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ nicht enthalten sollen, wie sich durch einfache Überlegungen ergibt, die den früher bei den Eliminationsprozessen angestellten analog sind, auf die notwendige und hinreichende Form des kinetischen Potentials

$$H = \sum_{r_1, r_2 = 1, \dots \varrho} \varphi_{r_1 r_2}(t, q_1, \dots q_\sigma) p'_{r_1} p'_{r_2} + \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho;\ s_1 = 1, \dots \sigma} \psi_{r_1 s_1}(t, q_1, \dots q_\sigma) p'_{r_1} q'_{s_1}$$
$$+ \sum_{s_1, s_2 = 1, \dots \sigma} \chi_{s_1 s_2}(t, q_1, \dots q_\sigma) q'_{s_1} q'_{s_2} + N_1 p_1 + \dots + N_\varrho p_\varrho + F(t, q_1, \dots q_\sigma)$$

führt, worin $N_1, \dots N_\varrho$ Funktionen von t sind, so daß die zu den Parametern $p_1, \dots p_\varrho$ gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen die Form annehmen

$$-N_r + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = P_r; \qquad (r = 1, \dots \varrho)$$

es ist somit ersichtlich, daß die Voraussetzung der Unabhängigkeit der μ *Lagrange*schen Gleichungen (51.) und (52.) von den Parametern $p_1, \dots p_\varrho$ auf die vorher gemachte Annahme zurückführt, daß die linken Seiten des Systems (51.) vollständige nach t genommene Differentialquotienten sind, und daß der *Helmholtz*schen Voraussetzung für das kinetische Potential der Wert $N_r = 0$ entspricht.

Dieser Fall der Elimination von Parametern durch unmittelbare Integration und der Reduktion auf eine geringere Anzahl, dem ursprünglichen Systeme äquivalenter, ebenfalls zu einem kinetischen Potential erster Ordnung gehöriger *Lagrange*scher Gleichungen soll an den folgenden Problemen erläutert werden.

Sei ein freies System von n Punkten mit den Massen $m_1, \dots m_n$ und den Koordinaten $x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n$ gegeben, zwischen denen innere konservative Kräfte wirken, deren Kräftefunktion durch $U(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n)$ dargestellt sei, und werde diesem freien Systeme von n Punkten ein Punkt mit der Masse μ und den Koordinaten ξ, η, ζ angeschlossen, auf den eine sollizitierende Kraft nicht wirken soll, dem also nur eine Anfangsgeschwindigkeit erteilt werde, und dessen Lage in Beziehung zur Lage der n Punkte des freien Systems

I. durch eine Gleichung der Form

$$\zeta = f(\xi, \eta, x_i, y_i, z_i) \tag{78.}$$

bedingt ist; so soll zunächst gefragt werden, wie die Funktion f beschaffen sein muß, damit das kinetische Potential der $n+1$ Punkte mit den Massen $m_1, \ldots m_n, \mu$

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \frac{1}{2}\mu(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - U(x_i, y_i, z_i)$$

von ξ und η unabhängig ist, also, wie wir oben gesehen, eine Elimination der Parameter ξ, η, ζ und ihrer Ableitungen aus den zu den $n+1$ Punkten gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen sich wird ermöglichen lassen.

Da vermöge (78.) das kinetische Potential die Form annimmt

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \frac{1}{2}\mu\left\{\xi'^2 + \eta'^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial f}{\partial \eta}\eta' + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial f}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial f}{\partial z_i}z_i'\right)\right)^2\right\} - U(x_i, y_i, z_i),$$

so werden, wenn H von ξ und η unabhängig sein sollen, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ diese Größen nicht enthalten dürfen, die Gleichung (78.) also die Form haben müssen

$$\zeta = a\,\xi + b\,\eta + \omega(x_i, y_i, z_i),$$

worin a und b Konstanten sind, und das kinetische Potential somit lauten

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i + z_i'^2) - \frac{\mu}{2}\left[(1+a^2)\xi'^2 + 2\,a\,b\,\xi'\eta' + (1+b^2)\eta'^2 + 2\,(a\,\xi' + b\,\eta')\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] - U(x_i, y_i, z_i).$$

Die zu den Parametern ξ und η gehörigen *Lagrange*schen Gleichungen werden daher in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \xi'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \eta'} = 0$$

oder, wenn die Integrationskonstanten mit $-\mu c_1$ und $-\mu c_2$ bezeichnet werden, in

$$-\frac{1}{\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi'}=(1+a^2)\xi'+ab\eta'+a\frac{d\omega}{dt}=c_1,\quad -\frac{1}{\mu}\frac{\partial H}{\partial \eta'}=ab\xi'+(1+b^2)\eta'+b\frac{d\omega}{dt}=c_2$$

übergehen, aus denen sich

$$\xi'=\frac{-a\frac{d\omega}{dt}+(1+b^2)c_1-abc_2}{1+a^2+b^2},\quad \eta'=\frac{-b\frac{d\omega}{dt}+(1+a^2)c_2-abc_1}{1+a^2+b^2}$$

ergibt. Setzt man nun diese Werte von ξ', η', wie oben gefordert worden, in H ein, so folgt für den Wert des transformierten kinetischen Potentials, wie leicht ersichtlich,

$$(H)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-\frac{1}{2}\frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+b^2)c_1^2-2abc_1c_2+(1+a^2)c_2^2\right),$$

und somit das nach (77.) für den vorliegenden Fall durch

$$\overline{H}=(H)-\mu c_1(\xi')-\mu c_2(\eta')$$

definierte kinetische Potential

(79.) $$\overline{H}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-\frac{1}{2}\frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$
$$+\frac{\mu}{1+a^2+b^2}(ac_1+bc_2)\frac{d\omega}{dt}-\frac{3}{2}\frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+b^2)c_1^2-2abc_1c_2+(1+a^2)c_2^2\right)$$
$$-U(x_i,y_i,z_i),$$

nach welchem die Bewegung der Punkte x_i, y_i, z_i durch die *Lagrange*schen Gleichungen beschrieben wird

(80.) $$\begin{cases} m_i x_i''=\dfrac{\partial U}{\partial x_i}-\dfrac{\mu}{1+a^2+b^2}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_i}\dfrac{d^2\omega}{dt^2}, \\ m_i y_i''=\dfrac{\partial U}{\partial y_i}-\dfrac{\mu}{1+a^2+b^2}\dfrac{\partial\omega}{\partial y_i}\dfrac{d^2\omega}{dt^2}, \\ m_i z_i''=\dfrac{\partial U}{\partial z_i}-\dfrac{\mu}{1+a^2+b^2}\dfrac{\partial\omega}{\partial z_i}\dfrac{d^2\omega}{dt^2}; \end{cases} \quad (i=1,\ldots n)$$

die Bewegung des Punktes mit der Masse μ ist dann durch die Gleichungen bestimmt

$$(81.)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{a}{1+a^2+b^2}\,\omega + \dfrac{(1+b^2)c_1 - abc_2}{1+a^2+b^2}\,t + \varkappa_1, \\ \eta = -\dfrac{b}{1+a^2+b^2}\,\omega + \dfrac{(1+a^2)c_2 - abc_1}{1+a^2+b^2}\,t + \varkappa_2, \\ \zeta = \dfrac{1}{1+a^2+b^2}\,\omega + \dfrac{ac_1 + bc_2}{1+a^2+b^2}\,t + a\varkappa_1 + b\varkappa_2, \end{cases}$$

in denen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Integrationskonstanten darstellen. Die Gleichungen (81.) ergeben durch Elimination von ω die Beziehungen

$$\xi = -a\zeta + c_1 t + (1+a^2)\varkappa_1 + ab\varkappa_2 \quad \text{und} \quad \eta = -b\zeta + c_2 t + ab\varkappa_1 + (1+b^2)\varkappa_2,$$

woraus folgt, daß der Punkt μ sich in der Ebene bewegen wird

$$c_2\xi - c_1\eta + (ac_2 - bc_1)\zeta = c_2[(1+a^2)\varkappa_1 + ab\varkappa_2] - c_1[ab\varkappa_1 + (1+b^2)\varkappa_2].$$

Für den speziellen Fall der Bewegung einer der Schwere unterworfenen Masse m_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 in der Vertikalebene, mit welcher eine in derselben Ebene sich bewegende, von keiner sollizitierenden Kraft angegriffene Masse μ mit den Koordinaten ξ, η durch die Gleichung

$$(82.)\qquad \eta = a\xi + \omega(x_1, y_1)$$

verbunden ist, werden somit die Differentialgleichungen, welche die Bewegung der Masse m_1 beschreiben,

$$(83.)\quad m_1 x_1'' = -\frac{\mu}{1+a^2}\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{d^2\omega}{dt^2} \quad \text{und} \quad m_1 y_1'' = m_1 g - \frac{\mu}{1+a^2}\frac{\partial\omega}{\partial y_1}\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

lauten, während sich die Koordinaten der Masse μ den Ausdrücken gemäß ändern

$$(84.)\quad \xi = -\frac{a}{1+a^2}\omega + \frac{c_1}{1+a^2}t + \varkappa_1, \quad \eta = \frac{1}{1+a^2}\omega + \frac{ac_1}{1+a^2}t + a\varkappa_1.$$

Spezialisieren wir die ω-Funktion durch die Gleichung

$$\omega(x_1, y_1) = y_1 - ax_1,$$

so daß (82.) in

$$(85.)\qquad \eta - y_1 = a(\xi - x_1)$$

übergeht, so folgt aus den Bewegungsgleichungen (83.) unmittelbar, daß

$$(m_1+\mu)x_1'' = \frac{\mu a}{1+a^2}g, \quad (m_1+\mu)y_1'' = m_1 g + \frac{\mu a^2}{1+a^2}g$$

ist, oder daß der Punkt mit den Koordinaten x_1 und y_1 sich so bewegt, als wenn in ihm die Massen m_1 und μ vereinigt wären, und eine konstante Kraft mit der durch die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen gegebenen Horizontal- und Vertikalkomponente auf ihn wirkte. Aus (85.) ist ersichtlich, daß, wenn wir uns eine durch den Punkt m_1 gehende Stange mit dem Richtungskoeffizienten a parallel mit sich bewegt denken, der Punkt μ stets auf dieser Stange bleiben wird und, als sehr kleiner Ring aufgefaßt, sich auf der Stange so bewegen wird, wie wenn bei der stetigen parallelen Verschiebung der Stange eine Vorrichtung zwischen m_1 und μ die Entfernung dieser Punkte den Gleichungen

$$\xi = -\frac{a}{1+a^2}(y_1 - a x_1) + \frac{c_1}{1+a^2}t + \varkappa_1, \quad \eta = \frac{1}{1+a^2}(y_1 - a x_1) + \frac{a c_1}{1+a^2}t + a\varkappa_1$$

gemäß regelte.

Ist endlich $a=0$, bewegt sich also die Stange, auf welcher m_1 und μ liegen, parallel horizontal, so werden die beiden *Lagrange*schen Gleichungen in

$$(m_1+\mu)x_1'' = 0 \quad \text{und} \quad (m_1+\mu)y_1'' = m_1 g$$

übergehen und der Punkt x_1, y_1 sich also so bewegen, als ob in ihm die Massen m_1 und μ vereinigt wären, aber die Schwerkraft nur die Masse m_1 sollizitierte.

Wirken nun zwischen den n Punkten $m_1, \ldots m_n$ Kräfte, deren Kräftefunktion nur von den gegenseitigen Entfernungen abhängt und durch

$$U = \Sigma_{i,\varkappa} m_i m_\varkappa F(r_{i\varkappa})$$

dargestellt sein mag, worin

$$r_{i\varkappa}^2 = (x_i - x_\varkappa)^2 + (y_i - y_\varkappa)^2 + (z_i - z_\varkappa)^2$$

ist, so soll nunmehr die Frage beantwortet werden, wann durch die Verbindung eines Massenpunktes μ, auf den eine sollizitierende Kraft nicht wirkt, mit den gegebenen Punkten, und zwar durch den vorher als notwendig gefundenen Zusammenhang

$$\zeta = a\xi + b\eta + \omega(x_i, y_i, z_i),$$

die Bewegungsgleichungen der n Punkte durch die Elimination der Para-

meter ξ und η aus den *Lagrange*schen Gleichungen so modifiziert werden, daß die nunmehr wirkenden Kräfte wiederum eine von den gegenseitigen Entfernungen, aber auch von deren ersten Ableitungen abhängige Kräftefunktion W in dem früher erweiterten Sinne besitzen, so daß die $3n$ resultierenden *Lagrange*schen Gleichungen die Form haben

$$(86.)\qquad \begin{cases} m_i x'' = \dfrac{\partial W}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial x_i'}, \\ m_i y_i'' = \dfrac{\partial W}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial y_i'}, \\ m_i z_i'' = \dfrac{\partial W}{\partial z_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial z_i'}. \end{cases} \qquad (i=1,\dots n)$$

Die Zusammenstellung dieses Gleichungssystems mit dem *Lagrange*schen Systeme (80.) liefert, wie durch eine leichte Überlegung ersichtlich, als notwendige und hinreichende Bedingung für $\omega(x_i, y_i, z_i)$ die Form

$$\omega = \Sigma_{i,\varkappa}\varphi(r_{i\varkappa}),$$

worin φ eine willkürliche Funktion bedeutet, und es ergibt sich dann die verallgemeinerte Kräftefunktion der Gleichungen (86.)

$$(87.)\qquad \begin{aligned} W = \Sigma_{i,\varkappa}\Big\{ & m_i m_\varkappa F(r_{i\varkappa}) - \frac{1}{2}\frac{\mu}{1+a^2+b^2}\Big(\frac{\partial\varphi(r_{i\varkappa})}{\partial r_{i\varkappa}}\Big)^2 r_{i\varkappa}'^2 \\ & - \frac{\mu}{1+a^2+b^2}\frac{\partial\varphi(r_{i\varkappa})}{\partial r_{i\varkappa}} r_{i\varkappa}'\Big[\Sigma_{i_1,\varkappa_1}\frac{\partial\varphi(r_{i_1\varkappa_1})}{\partial r_{i_1\varkappa_1}} r_{i_1\varkappa_1}' - a c_1 - b c_2\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

während ξ, η, ζ nach (81.) durch die Gleichungen gegeben sind

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{a}{1+a^2+b^2}\Sigma_{i,\varkappa}\varphi(r_{i\varkappa}) + \frac{(1+b^2)c_1 - abc_2}{1+a^2+b^2}t + \varkappa_1, \\ \eta &= -\frac{b}{1+a^2+b^2}\Sigma_{i,\varkappa}\varphi(r_{i\varkappa}) + \frac{(1+a^2)c_2 - abc_1}{1+a^2+b^2}t + \varkappa_2, \\ \zeta &= \frac{1}{1+a^2+b^2}\Sigma_{i,\varkappa}\varphi(r_{i\varkappa}) + \frac{ac_1+bc_2}{1+a^2+b^2}t + a\varkappa_1 + b\varkappa_2. \end{aligned}$$

Die Kräftefunktion W liefert die allgemeinste Erweiterung des *Weber*schen Gesetzes, in welches dieselbe für zwei Punkte und $F(r_{i\varkappa}) = \frac{1}{r_{i\varkappa}}$, $\varphi(r_{i\varkappa}) = \sqrt{r_{i\varkappa}}$ unmittelbar übergeht. Für den Fall der Zuordnung mehrerer verborgener Punkte zu dem System der n Massenpunkte $m_1, \dots m_n$

gelten genau dieselben Schlüsse, doch ist leicht ersichtlich, daß man zu einer allgemeineren Form der erweiterten Kräftefunktion nicht geführt wird.

Nehmen wir nun an, daß

II. die Lage des Punktes μ zu der der n Punkte des freien Systems durch zwei Gleichungen

$$(88.) \qquad \eta = f_1(\xi, x_i, y_i, z_i), \quad \zeta = f_2(\xi, x_i, y_i, z_i)$$

bedingt ist, so wird das kinetische Potential der $n+1$ Punkte in

$$(89.)\quad H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \frac{1}{2}\mu\left\{\xi'^2 + \left[\frac{\partial f_1}{\partial \xi}\xi' + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial f_1}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial f_1}{\partial z_i}z_i'\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial \xi}\xi' + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial f_2}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial f_2}{\partial z_i}z_i'\right)\right]^2\right\} - U(x_i, y_i, z_i)$$

übergehen, und soll wieder H von ξ unabhängig sein, so wird sich, analog den früheren Betrachtungen, als notwendige und hinreichende Bedingung ergeben, daß die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \frac{\partial f_2}{\partial \xi}, \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_1}{\partial y_i}, \frac{\partial f_1}{\partial z_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial y_i}, \frac{\partial f_2}{\partial z_i}$$

die Variable ξ nicht enthalten, und somit die Gleichungen (88.) in

$$(90.) \qquad \eta = a\xi + \omega_1(x_i, y_i, z_i), \quad \zeta = b\xi + \omega_2(x_i, y_i, z_i),$$

worin a und b Konstanten, und das kinetische Potential in

$$(91.)\quad H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \frac{1}{2}\mu(1 + a^2 + b^2)\xi'^2 - \mu\left(a\frac{d\omega_1}{dt} + b\frac{d\omega_2}{dt}\right)\xi' - \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega_2}{dt}\right)^2\right) - U(x_i, y_i, z_i)$$

übergehen.

Die zu dem Parameter ξ gehörige *Lagrange*sche Gleichung liefert nun in Verbindung mit (90.)

$$\xi = -\frac{c}{1 + a^2 + b^2}t - \frac{1}{1 + a^2 + b^2}(a\omega_1 + b\omega_2),$$
$$\eta = -\frac{ac}{1 + a^2 + b^2}t + \frac{(1 + b^2)\omega_1 - ab\omega_2}{1 + a^2 + b^2},$$
$$\zeta = -\frac{bc}{1 + a^2 + b^2}t + \frac{-ab\omega_1 + (1 + a^2)\omega_2}{1 + a^2 + b^2},$$

worin c eine Integrationskonstante bedeutet, und es wird sich nach einer ähnlichen Entwicklung wie oben für das resultierende kinetische Potential der Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} = &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2) - \frac{1}{2}\frac{\mu(1+b^2)}{1+a^2+b^2}\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu(1+a^2)}{1+a^2+b^2}\left(\frac{d\omega_2}{dt}\right)^2 \\ &-\frac{\mu ab}{1+a^2+b^2}\frac{d\omega_1}{dt}\frac{d\omega_2}{dt} + \frac{\mu ac}{1+a^2+b^2}\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{\mu bc}{1+a^2+b^2}\frac{d\omega_2}{dt} \\ &+\frac{1}{2}\frac{\mu c^2}{1+a^2+b^2} - U(x_i, y_i, z_i)\end{aligned} \tag{92.}$$

ergeben, aus welchem die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen für das Massensystem $m_1, \ldots m_n$ folgen

$$\left\{\begin{aligned} m_i x_i'' = &\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+b^2)\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} + ab\frac{\partial \omega_2}{\partial x_i}\right)\frac{d^2\omega_1}{dt^2} \\ &- \frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+a^2)\frac{\partial \omega_2}{\partial x_i} + ab\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}\right)\frac{d^2\omega_2}{dt^2}, \\ m_i y_i'' = &\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+b^2)\frac{\partial \omega_1}{\partial y_i} + ab\frac{\partial \omega_2}{\partial y_i}\right)\frac{d^2\omega_1}{dt^2} \\ &- \frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+a^2)\frac{\partial \omega_2}{\partial y_i} + ab\frac{\partial \omega_1}{\partial y_i}\right)\frac{d^2\omega_2}{dt^2}, \\ m_i z_i'' = &\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+b^2)\frac{\partial \omega_1}{\partial z_i} + ab\frac{\partial \omega_2}{\partial z_i}\right)\frac{d^2\omega_1}{dt^2} \\ &- \frac{\mu}{1+a^2+b^2}\left((1+a^2)\frac{\partial \omega_2}{\partial z_i} + ab\frac{\partial \omega_1}{\partial z_i}\right)\frac{d^2\omega_2}{dt^2}. \end{aligned}\right. \tag{93.}$$

Für den Fall, daß die inneren durch die Kräftefunktion U repräsentierten Kräfte wieder Funktionen der gegenseitigen Entfernungen sind, werden sich ganz ähnliche Funktionen wie oben für die nach Elimination des Massenpunktes μ wirkenden Kräfte ergeben, wenn wieder die Bedingung gestellt wird, daß diese Kräfte eine Kräftefunktion erster Ordnung im erweiterten Sinne besitzen sollen.

Untersuchen wir endlich den Fall

III., in welchem die drei Koordinaten ξ, η, ζ mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i, durch drei Gleichungen

$$\xi = \varphi(x_i, y_i, z_i), \quad \eta = \psi(x_i, y_i, z_i), \quad \zeta = \chi(x_i, y_i, z_i)$$

verknüpft sind, so wird das kinetische Potential in den von ξ, η, ζ freien Ausdruck

$$(94.)\quad (H) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2\right) - U(x_i, y_i, z_i)$$

übergehen, und dann unmittelbar die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen die Form annehmen

$$(95.)\quad \begin{cases} m_i x_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} - \mu\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + \dfrac{\partial \chi}{\partial x_i}\dfrac{d^2\chi}{dt^2}\right), \\ m_i y_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial y_i} - \mu\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i}\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i}\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + \dfrac{\partial \chi}{\partial y_i}\dfrac{d^2\chi}{dt^2}\right), \\ m_i z_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} - \mu\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i}\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i}\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + \dfrac{\partial \chi}{\partial z_i}\dfrac{d^2\chi}{dt^2}\right). \end{cases}$$

§ 6.

Der obigen Fragestellung bezüglich der Elimination von Parametern auf algebraischem Wege oder durch Differentiation und Integration, und der sich daran schließenden Untersuchung der resultierenden Differentialgleichungen hinsichtlich ihrer *Lagrange*schen Form für kinetische Potentiale erster oder höherer Ordnung, reiht sich eine andere Aufgabe an, welche für bestimmte, als möglich erkannte Partikularsysteme von Werten einzelner Parameter für die anderen Parameter wieder *Lagrange*sche Gleichungen für kinetische Potentiale erster Ordnung aufzustellen sucht, die das gesamte, jenen Partikularwerten zugehörige System von partikulären Integralen aller Parameter definieren.

Möge ein Partikularsystem von Parameterwerten, welche den *Lagrange*schen Gleichungen (51.) und (52.) zugehören, durch die Gleichungen

$$F_1(t, p_1, \cdots p_\varrho, p_1', \cdots p_\varrho', q_1, \cdots q_\sigma, q_1', \cdots q_\sigma') = 0, \cdots,$$
$$F_\varrho(t, p_1, \cdots p_\varrho, p_1', \cdots p_\varrho', q_1, \cdots q_\sigma, q_1', \cdots q_\sigma') = 0$$

definiert und der Bedingung unterworfen sein, daß die hieraus hergeleiteten Werte

$$(96.)\quad \begin{aligned} p_1' &= f_1(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_1, \cdots q_\sigma, q_1', \cdots q_\sigma'), \cdots, \\ p_\varrho' &= f_\varrho(t, p_1, \cdots p_\varrho, q_1, \cdots q_\sigma, q_1', \cdots q_\sigma') \end{aligned}$$

in die Ausdrücke $\dfrac{\partial H}{\partial p_r'}$ eingesetzt, dieselben zu reinen Funktionen von t machen, so daß also

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_1'}\right)=\omega_1(t),\ \ldots\ \left(\frac{\partial H}{\partial p_2'}\right)=\omega_2(t),\ \ldots\ \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho'}\right)=\omega_\varrho(t)$$

ist, so werden nach (51.) für ebendieses Partikularsystem von Parameterwerten, wenn

$$P_r-\omega_r'(t)=\Omega_r(t) \qquad (r=1,\ldots\varrho)$$

gesetzt wird, die Gleichungen erfüllt sein müssen

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)=\Omega_r(t), \qquad (r=1,\ldots\varrho)$$

aus denen sich in Verbindung mit (96.) die zusammengehörigen Werte

$$(97.)\qquad p_r=\varphi_r(t,q_1,\ldots q_\sigma,q_1',\ldots q_\sigma'),\quad p_r'=\psi_r(t,q_1,\ldots q_\sigma,q_1',\ldots q_\sigma') \qquad (r=1,\ldots\varrho)$$

ergeben.

Setzen wir diese Werte in das Gleichungssystem (52.) ein, welches wieder in bekannter Bezeichnung die Form

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s'}\right)=Q_s \qquad (s=1,\ldots\sigma)$$

annimmt, so wird, da

$$\frac{\partial(H)}{\partial q_s}=\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)\frac{\partial p_r}{\partial q_s}+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial p_r'}\right)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s}=\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\Omega_r(t)\frac{\partial p_r}{\partial q_s}$$
$$+\sum_{r=1}^{\varrho}\omega_r(t)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s}$$
$$\frac{\partial(H)}{\partial q_s'}=\left(\frac{\partial H}{\partial q_s'}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)\frac{\partial p_r}{\partial q_s'}+\sum_{r=1}^{\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial p_r'}\right)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s'}=\left(\frac{\partial H}{\partial q_s'}\right)+\sum_{r=1}^{\varrho}\Omega_r(t)\frac{\partial p_r}{\partial q_s'}$$
$$+\sum_{r=1}^{\varrho}\omega_r(t)\frac{\partial p_r'}{\partial q_s'}$$

ist, das System der Gleichungen (52.) in ein *Lagrange*sches System übergehen, welches, wenn

$$\mathfrak{H}=(H)-\sum_{r=1}^{\varrho}\Omega_r(t)(p_r)-\sum_{r=1}^{\varrho}\omega_r(t)(p_r')$$

gesetzt wird, worin (p_r) und (p_r') durch (97.) definiert sind, in der Gestalt

$$-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q_s'}=Q_s \qquad (s=1,\ldots\sigma)$$

sich ergibt; die allgemeinen Integrale dieses Systems werden mit den Werten (97.) zusammen ein Partikularsystem von Integralen der Differentialgleichungen (51.) und (52.) liefern.

Um einen speziellen Fall hervorzuheben, möge vorausgesetzt werden, daß ein Partikularsystem von Integralen, den Gleichungen (96.) entsprechend, durch

$$p_1' = 0, \quad p_2' = 0, \quad \dots \quad p_\varrho' = 0 \tag{98.}$$

dargestellt, oder daß eine partikuläre Bewegung durch konstante Werte der Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ beschrieben werde, und daß die Werte (98.) die Ausdrücke $\frac{\partial H}{\partial p_r'}$ zu reinen Funktionen von t machen.

Da nun das kinetische Potential erster Ordnung für wägbare Massen die Form hat

$$H = \sum_{r_1, r_2 = 1, \dots \varrho} \varphi_{r_1 r_2} p_{r_1}' p_{r_2}' + \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho;\ s_1 = 1, \dots \sigma} \psi_{r_1 s_1} p_{r_1}' q_{s_1}' + \sum_{s_1, s_2 = 1, \dots \sigma} \chi_{s_1 s_2} q_{s_1}' q_{s_2}' + \sum_{r_1 = 1, \dots \varrho} \varphi_{r_1} p_{r_1}' + \sum_{s_1 = 1, \dots \sigma} \psi_{s_1} q_{s_1}' + F, \tag{99.}$$

in welcher sämtliche Koeffizienten im allgemeinen von $t, p_1, \dots p_\varrho, q_1, \dots q_\sigma$ abhängen, also

$$\frac{\partial H}{\partial p_r'} = \sum_{r=1}^{\varrho} \varphi_{r_1 r} p_{r_1}' + \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{r s_1} q_{s_1}' + \varphi_r$$

ist, so werden die Ausdrücke (98.), wie verlangt worden, $\frac{\partial H}{\partial p_r'}$ dann und nur dann zu einer reinen Funktion von t machen, wenn

$$\psi \quad = \frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial q_{s_1}'} = 0, \qquad (r = 1, \dots \varrho;\ s_1 = 1, \dots \sigma) \tag{100.}$$

und φ_r eine Funktion von t ist; sind diese Bedingungen erfüllt, so werden, wie oben gezeigt, die zu (98.) gehörigen Werte von $q_1, \dots q_\sigma$ wieder durch *Lagrange*sche Gleichungen mit dem angegebenen kinetischen Potentiale $\mathfrak{H}$ bestimmt sein. Führen wir die weitere Beschränkung ein, daß für das Problem aus der Mechanik wägbarer Massen die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explizite enthalten, also in (99.) $\varphi_{r_1} = \psi_{s_1} = 0$ ist, so kommen wir zu dem von *Helmholtz* betrachteten Falle der unvollständigen Probleme, wonach, wenn ein Partikularsystem von Integralen durch konstante

Werte von $p_1, \dots p_\varrho$ angezeigt wird, und nach (100.) das kinetische Potential keine in den Ableitungen der Parameter p und q bilinearen Glieder enthält, die Elimination der Parameter $p_1, \dots p_\varrho$ auf ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in den Parametern $q_1, \dots q_\sigma$ führt, welches die Form *Lagrange*scher Gleichungen für ein kinetisches Potential erster Ordnung besitzt, und dessen Integrale nebst den Gleichungen $p_1 = c_1, \dots p_\varrho = c_\varrho$, worin $c_1, \dots c_\varrho$ Konstante sind, ein Partikularsystem von Integralen des gegebenen Systems der $\mu = \varrho + \sigma$ *Lagrange*schen Gleichungen bilden.

Druckfehlerverzeichnis zu den Arbeiten von Perron und Voronoï.

Seite	Zeile	statt	muß es heißen
291	10 v. o.	$<$	$>$
291	19 v. o.	$\|\gamma\| =$	$\|\gamma\| = 1$
100	1 v. u.	$\Re$	R
102	7 v. u.	nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ substitutions	nombre des substitutions
116	12 v. o.	inégalités	égalités
117	4 v. u.	$y_h(\xi_h)$	$y_h(\xi_k)$
120	4 v. o.	p_{ik}	p_{1k}
121	13 v. o.	p_{12}	$(p_{12}$
122	10 v. o.	$\dots \xi_m{}^h p_{mk}$	$\dots + \xi_{mh} p_{mk}$
125	6 v. o.	différentes	les différentes
138	10 v. u.	$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \Re \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + R \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$
145	15 v. o.	a_i	a_{ij}
147	16 v. o.	x'_k	x'_{k_i}

Über orthogonale Substitutionen und die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten.

Von Herrn *E. Jahnke* in Berlin.

Für die Theorie der allgemeinen Thetafunktionen von zwei Argumenten ist, wie *Caspary*, Herr *Martin Krause* und ich gezeigt haben, die Gruppe der linearen automorphen Substitutionen, also die orthogonale Gruppe, von fundamentaler Bedeutung*). Die orthogonalen Substitutionen, welche dabei auftreten, sind reell, bzw. lassen sich stets auf reelle Form bringen und sind vom vierten Grade, führen also zu einem System von sechzehn Koeffizienten g_{ij}, die den Bedingungen genügen:

$$(S_1)\qquad \begin{cases} g_{i1}g_{k1}+g_{i2}g_{k2}+g_{i3}g_{k3}+g_{i4}g_{k4}=0, \\ g_{1i}g_{1k}+g_{2i}g_{2k}+g_{3i}g_{3k}+g_{4i}g_{4k}=0, \\ g_{i1}^2+g_{i2}^2+g_{i3}^2+g_{i4}^2=g, \\ g_{1i}^2+g_{2i}^2+g_{3i}^2+g_{4i}^2=g. \end{cases} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,k=1,2,3,4 \\ i\neq k \end{smallmatrix}\right)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von der üblichen Form der Orthogonalität dadurch, daß in den beiden letzten Gleichungen rechter Hand g statt der Einheit auftritt. Gleichwohl will ich ein solches System, dem Vorgange von *Caspary* und Herrn *Frobenius* folgend, orthogonal nennen. Insbesondere soll ein solches System als *orthogonales Sechzehnersystem* oder kurz als *Sechzehnersystem* bezeichnet werden.

*) Mit den Beziehungen zwischen orthogonalen Substitutionen und elliptischen Thetafunktionen hat sich auch Herr *Study* eingehend beschäftigt. Vgl. das grundlegende Werk: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. Leipzig 1903, S. Hirzel.

Nun läßt sich jede orthogonale Substitution vierten Grades, welche die *Euler-Cayley*sche Parameterdarstellung zuläßt — und nur mit solchen werde ich es im folgenden zu tun haben — auf eine spezielle Substitution desselben Grades zurückführen. Die sechzehn Koeffizienten des Systems, das dieser speziellen orthogonalen Substitution entspricht, haben die Eigenschaft, daß sie als Determinante geschrieben, eine schiefe Determinante bilden, wo $g_{ij} = -g_{ji} (i \neq j)$ und außerdem $g_{ii} = \pm g_{jj}$ ist, da ja das System orthogonal sein soll. Ein solches Sechzehnersystem läßt sich in der Form schreiben

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{array}$$

und soll *orthogonales Elementarsystem* oder *elementares Sechzehnersystem* oder kurz *Elementarsystem* heißen. Dabei bedeuten die α beliebige Parameter.

Multipliziere ich das vorstehende Elementarsystem mit einem zweiten, dessen Parameter β genannt werden mögen,

$$\begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 & \beta_4 \\ -\beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \\ \beta_3 & -\beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & -\beta_1, \end{array}$$

und welches aus dem ersten durch Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen hervorgeht — *wobei unter Multiplikation zweier Systeme die Multiplikation jeder Horizontalreihe des ersten mit jeder Horizontalreihe des zweiten zu verstehen sein soll* — dann ergibt sich die *Euler-Cayley*sche Parameterdarstellung einer orthogonalen Substitution vierten Grades:

$$(S_2) \quad \begin{cases} g_{11} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4, & g_{21} = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3, \\ g_{12} = -(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3), & g_{22} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4, \\ g_{13} = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2, & g_{23} = -(\alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1), \\ g_{14} = \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_1, & g_{24} = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2, \\ g_{31} = -(\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2), & g_{41} = -(\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_1), \\ g_{32} = \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1, & g_{42} = -(\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2), \\ g_{33} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4, & g_{43} = -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3), \\ g_{34} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3, & g_{44} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4, \end{cases}$$

deren Determinante

$$g=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2)$$

ist.

Zu den n^2 Koeffizienten eines Orthogonalsystems $\{g_{ij}\}$ treten noch $n(n-1)$ Differentialgrößen p_{rs}, v_{rs}, die aus der Multiplikation der Koeffizienten einer Horizontal- bzw. Vertikalreihe mit den Differentialen der entsprechenden Koeffizienten einer anderen Horizontal- bzw. Vertikalreihe entspringen. In dem Falle $n=4$ sind es zwölf Differentialgrößen, die danach, wie folgt, zu definieren sind:

$$(S_3)\quad\begin{cases} g\,p_{rs}=-(g_{1i}dg_{1j}+g_{2i}dg_{2j}+g_{3i}dg_{3j}+g_{4i}dg_{4j}),\\ g\,v_{rs}=\ \ (g_{i1}dg_{j1}+g_{i2}dg_{j2}+g_{i3}dg_{j3}+g_{i4}dg_{j4}),\\ g=\ \ g_{1i}^2+g_{2i}^2+g_{3i}^2+g_{4i}^2=g_{i1}^2+g_{i2}^2+g_{i3}^2+g_{i4}^2. \end{cases}\qquad \left(\begin{array}{r} i\neq j\neq r\neq s;\\ i,j,r,s=1,2,3,4;\ 1,4,2,3\\ 2,3,1,4;\ 2,4,3,1\\ 3,1,2,4;\ 3,4,1,2 \end{array}\right)$$

Für $\beta=\alpha$ bzw. $\alpha=\beta$ sinkt der Grad der orthogonalen Substitution auf drei herab. Es verschwinden nämlich sechs der Koeffizienten g_{ij} identisch, es sind $g_{14}, g_{24}, g_{34}; g_{41}, g_{42}, g_{43}$, und aus dem Sechzehnersystem entspringen zwei orthogonale Neunersysteme, die als dem Sechzehnersystem *zugehörig* bezeichnet werden sollen. Die Koeffizienten jedes der beiden zugehörigen Neunersysteme lassen die *Euler-Cayley*sche Parameterdarstellung zu, welche für das eine von ihnen, wie folgt, lautet:

$$A=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2,$$

$$(N_1)\quad\begin{cases} Aa_{11}=\ \ \alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2+\alpha_4^2, & Aa_{12}=-2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4), & Aa_{13}=\ \ 2(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4),\\ Aa_{21}=\ \ 2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4), & Aa_{22}=\ \ \alpha_1^2-\alpha_2^2+\alpha_3^2-\alpha_4^2, & Aa_{23}=-2(\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3),\\ Aa_{31}=-2(\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4), & Aa_{32}=\ \ 2(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3), & Aa_{33}=\ \ \alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2-\alpha_4^2, \end{cases}$$

wobei die Determinante gleich der positiven Einheit ist. Das andere zugehörige Neunersystem ergibt sich, wenn man a durch β, a durch b und A durch B ersetzt. Das Sechzehnersystem, dem diese beiden Neunersysteme zugehören, hat die Determinante

$$g=A\cdot B.$$

Hiernach kann ich sagen, daß jedes orthogonale Neunersystem $\{a_{mn}\}$ durch Multiplikation zweier Elementarsysteme der Form

$$\begin{matrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_4 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{matrix}$$

gewonnen werden kann, die aus einander durch Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihe hervorgehen, daß sich also jedes orthogonale Neunersystem als Quadrat eines Elementarsystems ausdrücken läßt, ein Resultat, das eine explizite Darstellung für einen speziellen Fall eines von Herrn *Taber**) ausgesprochenen Theorems bietet.

Jedes der beiden Neunersysteme, die einem gegebenen Sechzehnersystem zugehören, besitzt sechs Differentialgrößen, p_h, v_h, die ich, um ihren Ursprung kenntlich zu machen, besser $p_h(\alpha), v_h(\alpha)$; $p_h(\beta), v_h(\beta)$ nennen will.

Es wird genügen, die Definitionsgleichung für das eine System hinzuschreiben:

$$(N_2) \qquad \begin{cases} p_h(\alpha) = -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}), \\ v_h(\alpha) = \quad a_{k1}\,da_{l1} + a_{k2}\,da_{l2} + a_{k3}\,da_{l3}. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h,k,l = 1,2,3 \\ 2,3,1 \\ 3,1,2 \end{pmatrix}$$

Nun besteht zwischen den Koeffizienten und Differentialgrößen eines Sechzehnersystems einerseits und den entsprechenden Elementen der beiden zugehörigen Neunersysteme andrerseits der sehr einfache Zusammenhang**)

$$(1.) \qquad \begin{cases} g a_{1h} = g_{ij}^{14} + g_{rs}^{14}, & g b_{1h} = g_{ij}^{14} - g_{rs}^{14}, \\ g a_{2h} = g_{ij}^{24} + g_{rs}^{24}, & g b_{2h} = g_{ij}^{24} - g_{rs}^{24}, \\ g a_{3h} = g_{ij}^{34} + g_{rs}^{34}, & g b_{3h} = g_{ij}^{34} - g_{rs}^{34}, \end{cases}$$

*) New York M. S. Bull. **3**, 251 bis 259 (1894).

**) Diese Relationen (vgl. dieses Journal Bd. 118, S. 230, wo sie durch ein Versehen im Vorzeichen entstellt sind) folgen auch aus der *Grassmann*schen Identität

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,|\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}] = [\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{c}]\,[\boldsymbol{b}\,|\,\boldsymbol{d}] - [\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{d}]\,[\boldsymbol{b}\,|\,\boldsymbol{c}],$$

wenn

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + a_4\boldsymbol{e}_4, \quad \boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3 + \beta_4\boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{c} = \gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_3\boldsymbol{e}_3 + \gamma_4\boldsymbol{e}_4, \quad \boldsymbol{d} = \delta_1\boldsymbol{e}_1 + \delta_2\boldsymbol{e}_2 + \delta_3\boldsymbol{e}_3 + \delta_4\boldsymbol{e}_4,$$

gesetzt und

$$\boldsymbol{e}_i\,|\,\boldsymbol{e}_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \leqq k, \end{cases} \qquad \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k\,|\,\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases} \qquad \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i$$

angenommen wird. (Vgl. meine „Vorlesungen über die Vektorenrechnung", S. 105, 108, Leipzig 1905, B. G. Teubner.)

wobei $g_{ij}^{rs} = g_{ri}g_{sj} - g_{rj}g_{si}$ die Unterdeterminanten des Systems $\{g_{ik}\}$ bedeuten für

$$\begin{aligned} h&=1; \quad i,j,r,s=1,4,2,3,\\ h&=2; \quad i,j,r,s=2,4,3,1,\\ h&=3; \quad i,j,r,s=3,4,1,2, \end{aligned}$$

und weiter*)

$$(2.)\quad \begin{cases} 2p_{14}=p_1(\alpha)+p_1(\beta), & 2v_{14}=v_1(\alpha)+v_1(\beta),\\ 2p_{24}=p_2(\alpha)+p_2(\beta), & 2v_{24}=v_2(\alpha)+v_2(\beta),\\ 2p_{34}=p_3(\alpha)+p_3(\beta), & 2v_{34}=v_3(\alpha)+v_3(\beta),\\ 2p_{23}=p_1(\alpha)-p_1(\beta), & 2v_{23}=v_1(\alpha)-v_1(\beta),\\ 2p_{31}=p_2(\alpha)-p_2(\beta), & 2v_{31}=v_2(\alpha)-v_2(\beta),\\ 2p_{12}=p_3(\alpha)-p_3(\beta), & 2v_{12}=v_3(\alpha)-v_3(\beta). \end{cases}$$

Ich will noch zwei Folgerungen hervorheben, die später mehrfach Verwendung finden sollen. Da die benutzte Parameterdarstellung homogen ist, können sich die Koeffizienten eines Orthogonalsystems nicht ändern, wenn die Parameter mit einem willkürlichen Faktor versehen werden. Alsdann bleiben auch die zugehörigen Differentialgrößen unverändert, wie der Anblick des Formelsystems erkennen läßt, d. h. es muß sein

$$p_h(\lambda\alpha)=p_h(\alpha), \quad v_h(\lambda\alpha)=v_h(\alpha),$$

wo λ einen willkürlichen, aber für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ gemeinsamen Faktor bedeutet. Und umgekehrt gilt *erster Hilfssatz: Wenn zwei Neunersysteme in ihren Differentialgrößen übereinstimmen, dann können sich ihre Parameter nur durch einen gemeinsamen Faktor unterscheiden.*

Um dies zu erkennen, braucht man nur die *Euler*schen Differentialidentitäten

$$(3.)\quad \begin{cases} da_{11}=a_{12}p_3-a_{13}p_2, & da_{21}=a_{22}p_3-a_{23}p_2, & da_{31}=a_{32}p_3-a_{33}p_2\\ da_{12}=a_{13}p_1-a_{11}p_3, & da_{22}=a_{23}p_1-a_{21}p_3, & da_{32}=a_{33}p_1-a_{31}p_3\\ da_{13}=a_{11}p_2-a_{12}p_1, & da_{23}=a_{21}p_2-a_{22}p_1, & da_{33}=a_{31}p_2-a_{32}p_1 \end{cases}$$

anzusehen, welche zunächst die Relationen $\Sigma a_{1h}^2 = \text{const.}$, $\Sigma a_{1h}a_{2h} = \text{const.}$,

*) Ich benutze diese Gelegenheit, um ein Versehen im Vorzeichen richtig zu stellen, das bei der Mitteilung dieses Formelsystems (Sitzungsber. Berl. Ak. 1896, S. 1028) untergelaufen ist und auf den Seiten 230, 232 der Arbeit in diesem Journal Bd. 118 einige Vorzeichenänderungen nach sich zieht. (Vgl. die Anmerkung **) auf S. 246.)

$\Sigma a_{1h} a_{3h} = \text{const.}$ nach sich ziehen. Ein zweites Neunersystem mit denselben Differentialgrößen p_h, v_h heiße $\{a'_{mn}\}$; dann gelten dafür die entsprechenden Differentialidentitäten, woraus durch Subtraktion hervorgeht

$$d(a_{h1} - a'_{h1}) = (a_{h2} - a'_{h2}) p_3 - (a_{h3} - a'_{h3}) p_2. \qquad (h = 1, 2, 3)$$

Diese Identitäten führen, wie oben, zu den Relationen $\Sigma(a_{1h} - a'_{1h})^2 = c_1$, $\Sigma(a_{1h} - a'_{1h})(a_{2h} - a'_{2h}) = c_2$, $\Sigma(a_{1h} - a'_{1h})(a_{3h} - a'_{3h}) = c_3$. Andrerseits existieren zwischen den p_h, v_h eines Neunersystems die linearen Beziehungen

$$p_h = a_{1h} v_1 + a_{2h} v_2 + a_{3h} v_3, \quad p_h = a'_{1h} v_1 + a'_{2h} v_2 + a'_{3h} v_3, \qquad (h = 1, 2, 3)$$

woraus

$$0 = (a_{1h} - a'_{1h}) v_1 + (a_{2h} - a'_{2h}) v_2 + (a_{3h} - a'_{3h}) v_3. \qquad (h = 1, 2, 3)$$

Multipliziere ich diese drei Gleichungen sukzessive mit $a_{11} - a'_{11}$, $a_{12} - a'_{12}$, $a_{13} - a'_{13}$, so liefert ihre Addition $0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$. Eine solche Relation ist aber, da die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ von einander unabhängig vorausgesetzt werden, nur möglich, wenn $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$. Aus $\Sigma(a_{1h} - a'_{1h})^2 = 0$ folgt dann

$$a_{1h} = a'_{1h}, \quad a_{2h} = a'_{2h}, \quad a_{3h} = a'_{3h}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Frage nach den Bedingungen, unter denen zwei Orthogonalsysteme additiv oder subtraktiv verbunden werden dürfen, ohne den Gruppencharakter zu verlieren. Ein sehr einfacher Fall, wo diese Bedingungen jedenfalls erfüllt sind, ist der folgende: Ersetze ich in der *Euler-Cayley*schen Darstellung eines Sechzehnersystems die Parameter β durch $\beta \pm \gamma \pm \delta \pm \ldots$, so entspringt das Orthogonalsystem $\{g_{ij} \pm h_{ij} \pm k_{ij} \pm \ldots\}$, wo die Koeffizienten g_{ij} den Parameterquadrupeln α, β, die h_{ij} den Quadrupeln α, γ, die k_{ij} den Quadrupeln α, δ usw. entsprechen. Da es offenbar gestattet ist, noch willkürliche Faktoren einzuführen, ergibt sich ein *zweiter Hilfssatz: Die Summe beliebig vieler Sechzehnersysteme, die in einem Parameterquadrupel übereinstimmen, ist wieder ein Orthogonalsystem. Dabei können die einzelnen Summanden noch mit willkürlichen, von System zu System variablen Faktoren versehen werden.* Wird speziell $\alpha + \beta$ an Stelle von β gesetzt, so ergibt sich das einfache System

$$(4.) \qquad \begin{cases} g_{11} + A a_{11} & g_{12} + A a_{12} & g_{13} + A a_{13} & g_{14} \\ g_{21} + A a_{21} & g_{22} + A a_{22} & g_{23} + A a_{23} & g_{24} \\ g_{31} + A a_{31} & g_{32} + A a_{32} & g_{33} + A a_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} + A, \end{cases}$$

das sich aus dem Orthogonalsystem $|g_{ij}|$ und einem seiner *zugehörigen* Neunersysteme zusammensetzt.

Alle diese Sätze und Beziehungen haben, wie bereits erwähnt, Bedeutung für die Theorie der Thetafunktionen von zwei Argumenten; insbesondere hat sich ihr Nutzen gezeigt, wenn es sich darum handelt, deren *algebraische* Relationen in einfachster Weise abzuleiten und übersichtlich zusammenzufassen. Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sollen die *Differentialrelationen* zwischen den Thetas bilden, wobei ich mich ebenfalls des Orthogonalsystems als ordnenden Prinzips bediene.

In drei kurzen Notizen*) habe ich bereits vor mehreren Jahren einige Resultate hierüber niedergelegt in der Erwartung, daß ich bald die Muße zu einer ausführlichen Darlegung finden würde. Äußere Umstände haben die sofortige Ausführung meiner Absicht vereitelt. Vor kurzem habe ich meine früheren Untersuchungen wieder aufnehmen können, und ich erlaube mir darüber im folgenden zu berichten (vgl. Jahresber. D. M. V. 1907, S. 551 bis 554).

Ich lasse eine kurze *Inhaltsübersicht* folgen: In Nr. 1 und 3 werden Methoden entwickelt, um aus einem vorgelegten Neuner- bzw. Sechzehnersystem durch infinitesimale Transformation ihrer Parameter neue Orthogonalsysteme herzuleiten, unter denen die Systeme (I), (II) und (VI) durch ihren einfachen Aufbau bemerkenswert erscheinen. Die Nr. 2 und 3 bringen dann Anwendungen dieser Resultate auf die allgemeinen Thetas von zwei Argumenten. Besondere Aufmerksamkeit verdient hier dasjenige Orthogonalsystem, in welches die hyperelliptischen $\wp$-Funktionen eingehen: Multipliziert man nämlich jedes $\wp_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ mit dem Thetaquadrat $q_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ der zugehörigen Charakteristik, so bilden die sechzehn n-ten Ableitungen der $q\wp$-Funktionen in der *Casparys*chen Anordnung die Koeffizienten eines Orthogonalsystems. In Nr. 4 entwickele ich aus dem *Grassmann*schen Fundamentaltheorem Multiplikationsformeln zwischen vier der Sechzehnersysteme, die sich aus vier Parameterquadrupeln aufbauen lassen. Diese Formeln setzen die für die Ableitungen der Thetas gewonnenen Orthogonalsysteme mit einander in Verbindung. Insbesondere mache ich in Nr. 5 von ihnen Anwendung auf die $q\wp$-Funktionen. Ich gebe zunächst acht verschiedene lineare Darstellungen dieses Funktionssystems durch die Thetaquadrate. Alsdann

*) C. R. t. 125, p. 486—489 (1897); t. 126, p. 1083—1085 (1898). — Deuxième Congrès intern. des Math. Paris 1900, p. 279—280.

zeigt sich, daß zwischen den $q\wp$-Funktionen dieselbe Art der Abhängigkeit besteht, wie sie von den Thetaquadraten her wohlbekannt ist, daß nämlich jede durch vier linear unabhängige linear und homogen ausdrückbar ist. Und weiter, daß die *Rosenhain*schen und *Göpel*schen Relationen unter den Thetaquadraten auch für die $q\wp$-Funktionen gelten, wenn nur die konstanten Koeffizienten passend durch andere ersetzt werden. Es ergibt sich so zunächst eine weitgehende Analogie der linearen Abhängigkeiten zwischen den $q\wp$-Funktionen mit denjenigen für die Thetaquadrate. Eine weitere Untersuchung in Nr. 6 führt jedoch zu der Erkenntnis, daß die Abhängigkeit unter den $q\wp$-Funktionen eine speziellere ist, insofern als noch acht lineare Relationen hinzutreten, wie sie bei den Thetaquadraten nicht vorkommen. Um diese neuen Relationen in homogener Form zu gewinnen, empfiehlt es sich (Nr. 7) an Stelle der $q\wp$-Funktionen das — ebenfalls orthogonale — System der j-Funktionen einzuführen

$$j_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = q_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\,\wp_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + \frac{c_{\alpha\beta}\,c''_{\alpha\beta} - c'^{\,2}_{\alpha\beta}}{c_5^{\,2}}.$$

Und diese Einführung rechtfertigt sich noch dadurch, daß die *Rosenhain*schen und *Göpel*schen Relationen unter den $q\wp$-Funktionen sich nicht ändern, wenn die $q\wp$- durch die j-Funktionen ersetzt werden. Vermittelst der neuen Relationen vereinfachen sich dann die *Rosenhain*schen und *Göpel*schen Relationen unter den j-Funktionen in dem Sinne, daß beide Arten von Relationen zu einer Darstellung jeder j-Funktion durch drei linear-unabhängige führen. Geometrisch gedeutet, entspricht die Abhängigkeit unter den j-Funktionen einer Konfiguration von sechzehn Punkten, die sich als Ausartung der *Kummer*schen Konfiguration in sechzehn Punkte einer Ebene auffassen läßt.

1. *Eine Methode, aus einem Neunersystem durch infinitesimale Transformation seiner Parameter Orthogonalsysteme abzuleiten.* — Wenn es sich darum handelt, aus einem vorgegebenen Orthogonalsystem sogenannte *abgeleitete* Systeme zu gewinnen, so kann dies dadurch geschehen, daß man die Parameter des Stammsystems durch ganze rationale Funktionen derselben ersetzt. In dem besonderen Fall, wo die Parameter eines Sechzehnersystems durch ihre Quadrate ersetzt werden, entsteht ein Orthogonalsystem, dessen Koeffizienten sich bilinear durch die Koeffizienten des Stammsystems ausdrücken. Es ist bereits von *Caspary* aufgestellt und für die Gewinnung der *algebraischen* Relationen unter den Thetas verwertet worden*).

*) Dieses Journal Bd. 94, S. 78 (1881) und Ann. Ec. Norm. (3) t. 10, p. 194 (1893).

Anderer Art sind die abgeleiteten Systeme, welche sich für die Aufstellung der *Differentialrelationen* unter den Thetas als fruchtbar erweisen.

Ich gehe von einem Neunersystem mit den Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ aus und frage zunächst nach der Darstellung des Systems, das hieraus durch die Substitution $m\alpha + n d\alpha$ an Stelle von α abgeleitet werden kann. Da sich der Beantwortung der Frage Schwierigkeiten entgegenstellen — was schon darauf schließen läßt, daß das gesuchte System nicht zu den einfachsten gehören dürfte — lasse ich die Voraussetzung fallen, wonach das *abgeleitete* System wieder ein Neunersystem sei, und nehme vier weitere Parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ zu Hilfe im Hinblick darauf, daß die homogene Parameterdarstellung eines Sechzehnersystems acht Parameter verlangt. Der einfachste Fall ist offenbar der, daß die β gleich den Parametern α des *Stamm*systems gewählt werden. Der erste Koeffizient g_{11} des *abgeleiteten* Sechzehnersystems mit den beiden Parameterquadrupeln $m\alpha + n d\alpha$ und α stellt sich dann gemäß (S_2) dar in der Form

$$m(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2) + n(\alpha_1 d\alpha_1 - \alpha_2 d\alpha_2 - \alpha_3 d\alpha_3 + \alpha_4 d\alpha_4)$$

oder mit Rücksicht auf (N_1) in der Form

$$m A a_{11} + \frac{n}{2} d(A a_{11}) = a_{11}\left(mA + \frac{n}{2} dA\right) + \frac{n}{2} A da_{11}.$$

Und dieser Ausdruck wird — da er doch von a_{11} verschieden sein soll — seine einfachste Gestalt annehmen, sobald ich m und n so bestimme, daß der Koeffizient von a_{11} verschwindet, also wenn ich $m = -d\ln A$ und $n = 2$ wähle. Ermittle ich dann noch die übrigen Koeffizienten g_{ij}, so erhalte ich den Satz:

I. *Bezeichnen a_{mn} die Koeffizienten eines Neunersystems mit der Determinante $+1$, so bilden ihre vollständigen Differentiale da_{mn} zusammen mit den Differentialgrößen p_h, v_h und der Null ein Sechzehnersystem der Form*

$$\text{(I.)} \qquad \begin{matrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} & v_1 \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} & v_2 \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} & v_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0, \end{matrix}$$

dessen Determinante gleich $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ ist, und dessen Parameter die Werte $\frac{\alpha_\mu}{A}$ und $2 d\alpha_\mu - \alpha_\mu d\ln A$ haben, wo $A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$ und $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Die beiden, dem Sechzehnersystem *zugehörigen* Neunersysteme besitzen folglich, das eine die Parameter $\frac{a_\mu}{A}$ — ist also das Stammsystem selber — das andere die Parameter $2\,da_\mu - a_\mu d\ln A$.

Will man die Orthogonalitätsbedingungen des Systems (I.) noch erhärten, so bedient man sich am einfachsten der bekannten Identitäten

$$\left.\begin{aligned} da_{1h} &= a_{1k}\,p_l - a_{1l}\,p_k = -a_{2h}v_3 + a_{3h}v_2,\\ da_{2h} &= a_{2k}\,p_l - a_{2l}\,p_k = -a_{3h}v_1 + a_{1h}v_3,\\ da_{3h} &= a_{3k}\,p_l - a_{3l}\,p_k = -a_{1h}v_2 + a_{2h}v_1. \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} h,k,l = 1,2,3\\ 2,3,1\\ 3,1,2 \end{pmatrix}$$

Diese geben die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_i (da_{ih})^2 + p_h^2 &= \Sigma_i (da_{hi})^2 + v_h^2,\\ \Sigma_i (da_{ih}\,da_{ik}) + p_h p_k &= \Sigma_i (da_{hi}\,da_{ki}) + v_h v_k, \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} i = 1,2,3\\ h,k = 1,2,3 \end{pmatrix}$$

welche nichts anderes sind als die Orthogonalitätsgleichungen für die in (I.) genannten sechzehn Größen.

Der Satz I. besagt, daß die infinitesimalen Änderungen der neun Koeffizienten eines Orthogonalsystems für sich keine orthogonale Gruppe mehr bilden, wohl aber zusammen mit den sechs Differentialgrößen.

Deute ich die a_{mn} als die Richtungskosinus eines im starren Körper festen Systems gegen ein im Raume festes System, dann geben die p, q, r — wo $p_1 = p\,dt$, $p_2 = q\,dt$, $p_3 = r\,dt$ — die Geschwindigkeitskomponenten für die Drehung des beweglichen gegen das feste System und u, v, w — wo $v_1 = u\,dt$, $v_2 = v\,dt$, $v_3 = w\,dt$ — die Geschwindigkeitskomponenten der inversen Drehung; dabei hat der Geschwindigkeitsvektor die Länge $p^2 + q^2 + r^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Erteile ich nun dem starren Körper eine infinitesimale Drehung, so werden die Richtungskosinus der neuen Lage gegen das im Raume feste System natürlich wieder eine Gruppe bilden, nicht so die infinitesimalen Änderungen der neun Richtungskosinus. Diese bilden erst zusammen mit den genannten sechs Geschwindigkeitskomponenten eine orthogonale Gruppe.

Zu den *Elementen* eines Orthogonalsystems gehören außer den Koeffizienten noch die Differentialgrößen. Ich will daher auch den Zusammenhang der Differentialgrößen des erzeugten Systems mit denen des Stammsystems ermitteln. Es wird genügen, die Rechnung für eine der Differentialgrößen, etwa p_{23} durchzuführen.

Aus der ersten und dritten der Definitionsgleichungen (S_3) folgt

$$\Omega = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad -\Omega p_{23} = da_{11}\, dv_1 + da_{21}\, dv_2 + da_{31}\, dv_3$$

oder, da nach Satz I.

$$v_1\, da_{11} + v_2\, da_{21} + v_3\, da_{31} = 0$$

ist,

$$\Omega p_{23} = v_1\, d^2 a_{11} + v_2\, d^2 a_{21} + v_3\, d^2 a_{31},$$

was in Verbindung mit

$$v_h = a_{h1} p_1 + a_{h2} p_2 + a_{h3} p_3$$

gibt:

$$\Omega p_{23} = p_1 \Sigma_h a_{h1}\, d^2 a_{h1} + p_2 \Sigma_h a_{h2}\, d^2 a_{h1} + p_3 \Sigma_h a_{h3}\, d^2 a_{h1}.$$

Nun liefern die Identitäten (3.)

$$\Sigma a_{h1}\, d^2 a_{h1} = -p_2^2 - p_3^2, \quad \Sigma a_{h2}\, d^2 a_{h1} = p_1 p_2 + dp_3, \quad \Sigma a_{h3}\, d^2 a_{h1} = p_3 p_1 - dp_2,$$

so daß

$$\Omega p_{23} = p_2\, dp_3 - p_3\, dp_2$$

wird, woraus die Differentialgrößen p_{31}, p_{12} durch zyklische Vertauschung hervorgehen.

Um die drei anderen Differentialgrößen p_{14}, p_{24}, p_{34} zu finden, könnte ich den entsprechenden Weg einschlagen. Schneller komme ich zum Ziele durch Benutzung der oben mitgeteilten Relationen (2.), welche die Differentialgrößen eines Sechzehnersystems mit denen der beiden zugehörigen Neunersysteme verbinden. Das eine dieser Neunersysteme ist im vorliegenden Fall, wie bereits auf S. 252 hervorgehoben, das Stammsystem selber, seine Differentialgrößen sind also $p_h\left(\frac{\alpha}{A}\right) = p_h$, während die Differentialgrößen des anderen, nämlich $p_h(\beta)$ für $\beta = 2\, d\alpha - \alpha\, d\ln A$, noch unbekannt sind. Diese finde ich aber sofort aus dem Ansatz $2 p_{23} = p_1(\alpha) - p_1(\beta)$, nämlich

$$\Omega p_1(\beta) = \Omega p_1 - 2\,(p_2\, dp_3 - p_3\, dp_2).$$

Nun ist $2 p_{14} = p_1(\alpha) + p_1(\beta)$, demnach

$$\Omega p_{14} = \Omega p_1 - (p_2\, dp_3 - p_3\, dp_2),$$

und entsprechend p_{24}, p_{34}.

Bedenke ich noch, daß beim Übergang von den p_{rs} und p_h zu den v_{rs} bzw. v_h die Vorzeichen zu ändern sind, so ergibt sich für die zwölf Differentialgrößen des aus einem Neunersystem abgeleiteten Sechzehnersystems (I.) folgende Darstellung:

$$(\mathrm{I}^*)\quad \begin{cases} \Omega p_{14}=\Omega p_1-(p_2dp_3-p_3dp_2), & \Omega p_{23}=p_2dp_3-p_3dp_2,\\ \Omega p_{24}=\Omega p_2-(p_3dp_1-p_1dp_3), & \Omega p_{31}=p_3dp_1-p_1dp_3,\\ \Omega p_{34}=\Omega p_3-(p_1dp_2-p_2dp_1), & \Omega p_{12}=p_1dp_2-p_2dp_1,\\ \Omega v_{14}=\Omega v_1+v_2dv_3-v_3dv_2, & \Omega v_{23}=-(v_2dv_3-v_3dv_2),\\ \Omega v_{24}=\Omega v_2+v_3dv_1-v_1dv_3, & \Omega v_{31}=-(v_3dv_1-v_1dv_3),\\ \Omega v_{34}=\Omega v_3+v_1dv_2-v_2dv_1, & \Omega v_{12}=-(v_1dv_2-v_2dv_1),\\ \multicolumn{2}{c}{\Omega=p_1^2+p_2^2+p_3^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2.} \end{cases}$$

Das Sechzehnersystem (I.) läßt sich noch durch Benutzung des zweiten Hilfssatzes der Einleitung umgestalten. Sein Gruppencharakter bleibt nämlich erhalten, wenn ich die Koeffizienten da_{mn} um a_{mn} vermehre, und weiter noch, wenn ich diese Summanden mit willkürlichen Faktoren versehe. Insbesondere wähle ich die Zusammensetzung $a_{11}dA+Ada_{11}=d(Aa_{11})$. So ergibt sich der Satz*):

II. *Aus dem Neunersystem mit den Koeffizienten a_{mn} und den Differentialgrößen p_h, v_h entspringt das Sechzehnersystem*

$$(\mathrm{II.})\quad \begin{array}{cccc} d(Aa_{11}) & d(Aa_{12}) & d(Aa_{13}) & Av_1\\ d(Aa_{21}) & d(Aa_{22}) & d(Aa_{23}) & Av_2\\ d(Aa_{31}) & d(Aa_{32}) & d(Aa_{33}) & Av_3\\ -Ap_1 & -Ap_2 & -Ap_3 & dA, \end{array}$$

wo A eine willkürliche Funktion bedeutet, von der nur die Existenz des Differentials vorausgesetzt ist. Die Determinante des Systems ist gleich $A^2\Omega+(dA)^2$.

Insbesondere kann die Funktion A als der *Euler*sche Orthogonalitätsfaktor angesprochen werden, wie er in dem Formelsystem (N_1) auftritt. Dann führt die Gleichung $d(Aa_{11})=d(\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2+\alpha_4^2)=2(\alpha_1d\alpha_1-\alpha_2d\alpha_2-\alpha_3d\alpha_3+\alpha_4d\alpha_4)$ zu einer einfachen Erzeugungsweise des eben aufgestellten Sechzehnersystems. Nämlich, man braucht nur in dem Gleichungssystem (S_2), das die Parameterdarstellung eines Sechzehnersystems ausspricht, das zweite

*) Vgl. Jahresberichte der D. M. V. Bd. 12, S. 104.

Parameterquadrupel gleich dem doppelten Differential des ersten, also $\beta = 2\,d\alpha$, zu wählen, um zu erkennen, daß dem System (II.) die Parameter α_μ und $2\,d\alpha_\mu$ zuzuordnen sind.

In (I.) und (II.) besitze ich *Sechzehner*systeme, die einem *Neuner*system entspringen. Von ihnen will ich Gebrauch machen, wenn ich jetzt die Suche nach *Neuner*systemen wieder aufnehme, welche das Stammsystem aus sich selber erzeugt.

Ich erinnere zunächst an den Zusammenhang der Koeffizienten eines Sechzehnersystems mit den Koeffizienten der beiden zugehörigen Neunersysteme, wie er sich in den Gleichungen (1.) ausspricht. Nehme ich nun das System (I.), so haben, wie oben gezeigt, die beiden zugehörigen Neunersysteme die Parameter $\frac{\alpha_\mu}{A}$ und $2\,d\alpha_\mu - \alpha_\mu\, d\ln A$. Andrerseits sind die Koeffizienten des Systems (I.) wohlbekannt, und die Koeffizienten des ersten der beiden Neunersysteme stimmen mit den a_{mn} überein, folglich muß es möglich sein, aus dem erwähnten Zusammenhang die Koeffizienten des zweiten Neunersystems zu finden.

Statt diesen Weg einzuschlagen, ziehe ich vor, das Neunersystem hinzuschreiben, um nachträglich das Resultat zu erhärten, in Satz

III. *Aus dem Neunersystem mit den Koeffizienten a_{mn} und den Differentialgrößen p_h, v_h entspringt durch infinitesimale Transformation der Parameter das Neunersystem*

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} \Omega b_{11} = 2\,p_1 v_1 - \Omega a_{11} & \Omega b_{12} = 2\,p_2 v_1 - \Omega a_{12} & \Omega b_{13} = 2\,p_3 v_1 - \Omega a_{13} \\ \Omega b_{21} = 2\,p_1 v_2 - \Omega a_{21} & \Omega b_{22} = 2\,p_2 v_2 - \Omega a_{22} & \Omega b_{23} = 2\,p_3 v_2 - \Omega a_{23} \\ \Omega b_{31} = 2\,p_1 v_3 - \Omega a_{31} & \Omega b_{32} = 2\,p_2 v_3 - \Omega a_{32} & \Omega b_{33} = 2\,p_3 v_3 - \Omega a_{33}; \end{cases}$$

seine Parameter sind gleich $\frac{1}{\sqrt{A}}(2\,d\alpha_\mu - \alpha_\mu\, d\ln A)$, *seine Determinante gleich* $+1$.

Daß dieses System die Orthogonalitätsbedingungen erfüllt, ist leicht einzusehen. Um seine Parameter zu erkennen, bestimme ich seine Differentialgrößen $q_h, w_h\,(h = 1, 2, 3)$. Auf Grund der Definitionsgleichungen (N_2) ergeben sich nach einigen Umformungen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Omega q_1 &= \Omega p_1 - 2(p_2 dp_3 - p_3 dp_2), & \Omega w_1 &= \Omega v_1 + 2(v_2 dv_3 - v_3 dv_2), \\ \Omega q_2 &= \Omega p_2 - 2(p_3 dp_1 - p_1 dp_3), & \Omega w_2 &= \Omega v_2 + 2(v_3 dv_1 - v_1 dv_3), \\ \Omega q_3 &= \Omega p_3 - 2(p_1 dp_2 - p_2 dp_1), & \Omega w_3 &= \Omega v_3 + 2(v_1 dv_2 - v_2 dv_1). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit den Ausdrücken für die $\Omega p_h(\beta)$, $\Omega v_h(\beta)$, welche auf dem Wege zu den Differentialgrößen des Systems (I.) aufgetreten sind, zeigt, daß

$$q_h = p_h(\beta), \quad w_h = v_h(\beta) \quad \text{für } \beta = 2\,d\alpha - \alpha\, d\ln A.$$

Daraus folgt aber nach dem ersten Hilfssatz der Einleitung, daß die *Euler*schen Parameter des Neunersystems $\{b_{mn}\}$ bis auf einen Faktor $1:\lambda$ gleich $2\,d\alpha - \alpha\, d\ln A$ sind. Dieses λ bestimmt sich etwa durch Vergleichung der beiden folgenden Darstellungsweisen des Orthogonalitätsfaktors Ω:

$$A^2\Omega = (Ap_1)^2 + (Ap_2)^2 + (Ap_3)^2 = 4(\alpha_1 d\alpha_4 + \alpha_2 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_2 - \alpha_4 d\alpha_1)^2$$
$$+ 4(\alpha_1 d\alpha_3 - \alpha_2 d\alpha_4 - \alpha_3 d\alpha_1 + \alpha_4 d\alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_1 + \alpha_3 d\alpha_4 - \alpha_4 d\alpha_3)^2$$

und

$$\lambda^2 A^2 \Omega = \Sigma_\mu (2A\, d\alpha_\mu - \alpha_\mu dA)^2,$$

wo $A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$. Der Vergleich der Faktoren von $(d\alpha_1)^2$ auf beiden Seiten zeigt, daß $\lambda^2 = A$ zu setzen ist. Demnach sind die *Euler*schen Parameter des Neunersystems $\{b_{mn}\}$ gleich $\frac{1}{\sqrt{A}}\,(2\,d\alpha - \alpha\, d\ln A)$, wobei der Quadratwurzel stets das gleiche Vorzeichen beizulegen ist.

Genau so wie das Sechzehnersystem (I.) zu dem Neunersystem (III.) geführt hat, würde auch das Sechzehnersystem (II.) zu einem Neunersystem gelangen lassen, das wieder mit einem der beiden zu (II.) gehörigen Neunersysteme übereinstimmt. Da sich das System (II.) aus den Parametern α_μ und $d\alpha_\mu$ aufbaut, so weiß ich von vornherein, daß die Parameter des neuen Neunersystems den $d\alpha_\mu$ proportional sein würden. Auf Grund dieser Kenntnis aber gewinne ich es schneller, wenn ich von dem Neunersystem (III.) ausgehe, dessen Parameter ja gleich $\frac{1}{\sqrt{A}}\,(2\,d\alpha_\mu - \alpha_\mu d\ln A)$ sind.

Betrachte ich nämlich den ersten Koeffizienten $\Omega b_{11} = 2p_1 v_1 - \Omega a_{11}$, so ist doch nach der *Euler*schen Parameterdarstellung (N_1), wenn eine Summe der Form $\beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + \beta_4^2$ kurz durch $\Sigma_\pm \beta^2$ angedeutet wird:

$$2A\,p_1 v_1 - \Omega A a_{11} = \Sigma_\pm (2\,d\alpha - \alpha\, d\ln A)^2$$
$$= 4\,\Sigma_\pm (d\alpha)^2 - 4\,d\ln \cdot A \Sigma_\pm \alpha\, d\alpha + (d\ln A)^2 \cdot \Sigma_\pm \alpha^2$$

oder wegen

$$A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2, \quad A a_{11} = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2,$$

$$2\,A\,p_1 v_1 - \Omega A a_{11} = 4\,\Sigma_{\pm}(da)^2 - 2\,dA\cdot da_{11} - \frac{1}{A}(dA)^2 a_{11},$$

woraus

$$\frac{4}{A}\,\Sigma_{\pm}(da)^2 = a_{11}[(d\ln A)^2 - \Omega] + 2\,d\ln A\,.\,da_{11} + 2\,p_1 v_1.$$

Dieses Ergebnis führt zu Satz

IV. *Substituiere ich für die Parameter a_μ eines Neunersystems mit den Koeffizienten a_{mn} und den Differentialgrößen p_h, v_h ihre ersten Differentiale, genauer $\frac{2}{\sqrt{A}}da_\mu$, so entspringt ein Neunersystem mit den Koeffizienten*

$$(\text{IV.}) \qquad [(d\ln A)^2 - \Omega]\,a_{mn} + 2\,d\ln A\cdot da_{mn} + 2\,p_n v_m \qquad (m, n = 1, 2, 3)$$

und dem Orthogonalitätsfaktor $\Omega + (d\ln A)^2$.

Hiermit habe ich eine Methode entwickelt, welche erlaubt, aus dem Stammsystem mit den Parametern a_μ allgemein die Neunersysteme mit den n-ten Ableitungen der a_μ als Parameterquadrupel und allgemeiner die Sechzehnersysteme mit den beiden Parameterquadrupeln $d^m a_\mu$ und $d^n a_\mu$ abzuleiten.

Ich will zum Schluß dieser Nummer noch das System explizite aufstellen, welchem die Parameter a und $d^2 a$ entsprechen, um hieraus ein neues, durch seine Einfachheit bemerkenswertes Sechzehnersystem zu gewinnen.

Dazu bemerke ich, daß $A a_{11} = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2$, also

$$d^2(A a_{11}) = \Sigma_{\pm}\, a\, d^2 a + 2\,\Sigma_{\pm}(da)^2,$$

woraus im Hinblick auf den oben für $\Sigma_{\pm}(da)^2$ gefundenen Ausdruck hervorgeht:

$$\frac{2}{A}\,\Sigma_{\pm}\, a\, d^2 a = \frac{2}{A}\,d^2(A a_{11}) - a_{11}[(d\ln A)^2 - \Omega] - 2\,d\ln A\,.\,da_{11} - 2\,p_1 v_1.$$

Hiernach bestätigt man leicht Satz

V. *Aus dem Neunersystem mit den Koeffizienten a_{mn} und den Differentialgrößen p_h, v_h entspringt das Sechzehnersystem*

$$(\text{V.}) \quad \begin{cases} 2\,d^2 a_{mn} + 2\,d\ln A\,.\,da_{mn} + [2\,d^2\ln A + (d\ln A)^2 + \Omega]\,a_{mn} - 2\,p_n v_m, & -\frac{2}{A}\,d(A p_n) \\ \frac{2}{A}\,d(A v_m) & , 2\,d^2\ln A + (d\ln A)^2 - \Omega \end{cases}$$

$(m, n = 1, 2, 3)$

mit den Parametern $\frac{2\,a_\mu}{A}$ und $d^2 a_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$.

Kombiniere ich hiermit einmal das Stammsystem der a_{mn} und zweitens das Sechzehnersystem (I.) unter Beifügung geeigneter Faktoren, so erhalte ich unter Anwendung des zweiten Hilfssatzes der Einleitung das folgende einfache Sechzehnersystem, wo die zweiten Ableitungen der a_{mn} auftreten:

$$\text{(VI.)} \qquad \begin{array}{cccc} d^2a_{11}-p_1v_1 & d^2a_{12}-p_2v_1 & d^2a_{13}-p_3v_1 & dv_1 \\ d^2a_{21}-p_1v_2 & d^2a_{22}-p_2v_2 & d^2a_{23}-p_3v_2 & dv_2 \\ d^2a_{31}-p_1v_3 & d^2a_{32}-p_2v_3 & d^2a_{33}-p_3v_3 & dv_3 \\ -dp_1 & -dp_2 & -dp_3 & -\Omega. \end{array}$$

Hieraus folgt nebenbei die Relation

$$dp_1^2+dp_2^2+dp_3^2=dv_1^2+dv_2^2+dv_3^2,$$

welche besagt, daß sich bei der Drehung eines starren Körpers nicht bloß die Länge $p^2+q^2+r^2$ seines Geschwindigkeitsvektors gegen Inversion der Drehung invariant verhält, sondern auch die Länge $dp^2+dq^2+dr^2$ einer infinitesimalen Änderung dieses Vektors*).

2. *Anwendung der mitgeteilten Methode, um aus dem Weberschen Neunersystem Orthogonalsysteme zwischen den Differentialen der Thetafunktionen von zwei Argumenten abzuleiten.* — Ich gehe jetzt dazu über, von den vorstehenden Ergebnissen eine einfache Anwendung auf die allgemeinen Thetafunktionen von zwei Argumenten zu machen. Dazu bedarf ich der Kenntnis *eines* Neunersystems. Als solches wähle ich das von Herrn *H. Weber***) bei Gelegenheit eines mechanischen Problems gefundene Orthogonalsystem, dessen Koeffizienten und Orthogonalitätsfaktor den zehn geraden Thetas und dessen Differentialgrößen den sechs ungeraden Thetas proportional sind:

---

*) Auf die Verwendung der Sätze dieser Nummer für die Theorie der Raumkurven sei hier nur hingewiesen. Bezeichnen nämlich a_{h1}, a_{h2}, a_{h3} $(h=1, 2, 3)$ die Richtungskosinus der Tangente bzw. der Haupt- und der Binormale in einem Punkte der Raumkurve, dann ist $p_1=-\frac{ds}{\tau}$, $p_2=0$, $p_3=\frac{ds}{\varrho}$ zu setzen, wo ϱ und τ die Radien der Krümmung und Torsion bedeuten.

**) Math. Ann. Bd. 14, S. 173—206. — Für die elliptischen Thetas hat Herr *Study* (a. a. O.) elegante Neunersysteme aufgestellt, aus welchen sich auf dem angegebenen Wege ebenfalls neue Orthogonalsysteme ableiten lassen.

$$(W)\qquad \begin{array}{lll} Aa_{11} = \quad c_0\,\vartheta_0(x), & Aa_{21} = \quad c_{01}\,\vartheta_{01}(x), & Aa_{31} = -\,c_{03}\,\vartheta_{03}(x), \\ Aa_{12} = -\,c_2\,\vartheta_2(x), & Aa_{22} = \quad c_{12}\,\vartheta_{12}(x), & Aa_{32} = \quad c_{23}\,\vartheta_{23}(x), \\ Aa_{13} = \quad c_4\,\vartheta_4(x), & Aa_{23} = -\,c_{14}\,\vartheta_{14}(x), & Aa_{33} = \quad c_{34}\,\vartheta_{34}(x), \\ Ap_1 = -\,c'_{24}\vartheta_{24}(x), & Av_1 = -\,c'_{13}\,\vartheta_{13}(x), & \\ Ap_2 = -\,c'_{04}\vartheta_{04}(x), & Av_2 = -\,c'_3\,\vartheta_3(x), & A = \quad c_5\,\vartheta_5(x), \\ Ap_3 = -\,c'_{02}\vartheta_{02}(x), & Av_3 = -\,c'_1\,\vartheta_1(x), & \end{array}$$

Dabei sind die Thetafunktionen in der *Weierstraß*schen Bezeichnung geschrieben, und der Kürze halber ist $\vartheta(x_1, x_2) = \vartheta(x)$ gesetzt. Das *Weber*sche Neunersystem ist ein spezieller Fall des von *Caspary* entdeckten Sechzehnersystems:

$$(C)\qquad \begin{array}{cccc} \vartheta_0(x)\,\vartheta_0(y) & -\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y) & \vartheta_4(x)\,\vartheta_4(y) & \vartheta_{13}(x)\,\vartheta_{13}(y) \\ \vartheta_{01}(x)\,\vartheta_{01}(y) & \vartheta_{12}(x)\,\vartheta_{12}(y) & -\vartheta_{14}(x)\,\vartheta_{14}(y) & \vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y) \\ -\vartheta_{03}(x)\,\vartheta_{03}(y) & \vartheta_{23}(x)\,\vartheta_{23}(y) & \vartheta_{34}(x)\,\vartheta_{34}(y) & \vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y) \\ -\vartheta_{24}(x)\,\vartheta_{24}(y) & -\vartheta_{04}(x)\,\vartheta_{04}(y) & -\vartheta_{02}(x)\,\vartheta_{02}(y) & \vartheta_5(x)\,\vartheta_5(y), \end{array}$$

welches ungeachtet der speziellen Charakteristiken bereits das allgemeinste darstellt, da es ja sämtliche sechzehn Charakteristiken umfaßt. Diese Anordnung der sechzehn Thetas will ich im folgenden als die *Casparysche Anordnung* bezeichnen.

Ziehe ich jetzt das System (I.) heran, so entspringt dem *Weber*schen System das Sechzehnersystem

$$(J_1)\qquad \begin{array}{cccc} c_0\,d\frac{\vartheta_0(x)}{\vartheta_5(x)} & -c_2\,d\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_5(x)} & c_4\,d\frac{\vartheta_4(x)}{\vartheta_5(x)} & c'_{13}\frac{\vartheta_{13}(x)}{\vartheta_5(x)} \\ c_{01}\,d\frac{\vartheta_{01}(x)}{\vartheta_5(x)} & c_{12}\,d\frac{\vartheta_{12}(x)}{\vartheta_5(x)} & -c_{14}\,d\frac{\vartheta_{14}(x)}{\vartheta_5(x)} & c'_3\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_5(x)} \\ -c_{03}\,d\frac{\vartheta_{03}(x)}{\vartheta_5(x)} & c_{23}\,d\frac{\vartheta_{23}(x)}{\vartheta_5(x)} & c_{34}\,d\frac{\vartheta_{34}(x)}{\vartheta_5(x)} & c'_1\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_5(x)} \\ -c'_{24}\,\frac{\vartheta_{24}(x)}{\vartheta_5(x)} & -c'_{04}\,\frac{\vartheta_{04}(x)}{\vartheta_5(x)} & -c'_{02}\,\frac{\vartheta_{02}(x)}{\vartheta_5(x)} & 0, \end{array}$$

welches die ungeraden Thetaquotienten mit den ersten Ableitungen der geraden Thetaquotienten verknüpft. Dabei ist, wie auch im folgenden, unter

$$d\frac{\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\vartheta_5(x)}$$

die Summe

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\vartheta_5(x)}\right)\cdot dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\vartheta_5(x)}\right)\cdot dx_2$$

oder ein Glied dieser Summe zu verstehen.

Die zugehörigen Differentialgrößen stellen sich wie folgt dar:

$$\begin{aligned}
\Omega p_{23} &= c'_{04}\, c'_{02}\,(\vartheta_{04}(x)\, d\vartheta_{02}(x) - \vartheta_{02}(x)\, d\vartheta_{04}(x)),\\
\Omega p_{31} &= c'_{02}\, c'_{24}\,(\vartheta_{02}(x)\, d\vartheta_{24}(x) - \vartheta_{24}(x)\, d\vartheta_{02}(x)),\\
\Omega p_{12} &= c'_{24}\, c'_{04}\,(\vartheta_{24}(x)\, d\vartheta_{04}(x) - \vartheta_{04}(x)\, d\vartheta_{24}(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega v_{23} &= -c'_3\, c'_1\,(\vartheta_3(x)\, d\vartheta_1(x) - \vartheta_1(x)\, d\vartheta_3(x)),\\
\Omega v_{31} &= -c'_1\, c'_{13}\,(\vartheta_1(x)\, d\vartheta_{13}(x) - \vartheta_{13}(x)\, d\vartheta_1(x)),\\
\Omega v_{12} &= -c'_{13}\, c'_3\,(\vartheta_{13}(x)\, d\vartheta_3(x) - \vartheta_3(x)\, d\vartheta_{13}(x)),
\end{aligned}$$

$$p_{14} = -\frac{c'_{24}\,\vartheta_{24}(x)}{c_5\,\vartheta_5(x)} - p_{23}, \qquad v_{14} = -\frac{c'_{13}\,\vartheta_{13}(x)}{c_5\,\vartheta_5(x)} - v_{23},$$

$$p_{24} = -\frac{c'_{04}\,\vartheta_{04}(x)}{c_5\,\vartheta_5(x)} - p_{31}, \qquad v_{24} = -\frac{c'_3\,\vartheta_3(x)}{c_5\,\vartheta_5(x)} - v_{31},$$

$$p_{34} = -\frac{c'_{02}\,\vartheta_{02}(x)}{c_5\,\vartheta_5(x)} - p_{12}, \qquad v_{34} = -\frac{c'_1\,\vartheta_1(x)}{c_5\,\vartheta_5(x)} - v_{12},$$

$$\Omega = c'^2_{24}\,\vartheta^2_{24}(x) + c'^2_{04}\,\vartheta^2_{04}(x) + c'^2_{02}\,\vartheta^2_{02}(x) = c'^2_{13}\,\vartheta^2_{13}(x) + c'^2_3\,\vartheta^2_3(x) + c'^2_1\,\vartheta^2_1(x),$$

wo

$$c'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial\,\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_1}\right)_{x_1=0,\ x_2=0} dx_1 + \left(\frac{\partial\,\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_2}\right)_{x_1=0,\ x_2=0} dx_2$$

bzw. gleich einem der beiden Summanden gesetzt ist, entsprechend der Bedeutung von $d\vartheta_{\alpha\beta}(x)$. Um nur die wichtigsten Relationen zu erhalten, welche zwischen den ersten Ableitungen gerader Thetaquotienten und den ungeraden Thetaquotienten bestehen, genügt es auf das System (J_1) etwa folgende beiden Eigenschaften eines Orthogonalsystems zur Anwendung zu bringen: Erstens muß die Summe der Produkte zweier Horizontal- oder zweier Vertikalreihen verschwinden. Und zweitens: Mit jedem Koeffizienten stehen drei Koeffizienten in einer Horizontalen und drei andere in einer Vertikalen; die Summe aus den Quadraten des einen Tripels ist gleich der Summe aus den Quadraten des anderen.

Als Relationen zwischen den ersten Ableitungen der Thetafunktionen selber aufgefaßt, lassen sie sich sehr viel einfacher darstellen, wenn man

die bekannten Relationen zwischen den Thetaquadraten zu Hilfe nimmt. Sie gehen alsdann auf folgende Formen zurück

$$c_0^2\,\vartheta_0'^2\,(x)+c_{01}^2\,\vartheta_{01}'^2\,(x)+c_{03}^2\,\vartheta_{03}'^2\,(x)-c_5^2\,\vartheta_5'^2\,(x)=c_{04}'^2\,\vartheta_{04}^2\,(x)+c_{02}'^2\,\vartheta_{02}^2\,(x),$$

$$c_0\,c_2\,\vartheta_0'(x)\,\vartheta_2'(x)-c_{01}\,c_{12}\,\vartheta_{01}'(x)\,\vartheta_{12}'(x)+c_{03}\,c_{23}\,\vartheta_{03}'(x)\,\vartheta_{23}'(x)=c_{24}'\,c_{04}'\,\vartheta_{24}(x)\,\vartheta_{04}(x),$$

$$c_0\,c_{13}'\,\vartheta_0'(x)\,\vartheta_{13}(x)+c_{01}\,c_3'\,\vartheta_{01}'(x)\,\vartheta_3(x)-c_{03}\,c_1'\,\vartheta_{03}'(x)\,\vartheta_1(x)-c_5\,c_{24}'\,\vartheta_5'(x)\,\vartheta_{24}(x)=0,$$

$$c_{24}'^2\,\vartheta_{24}^2\,(x)+c_{04}'^2\,\vartheta_{04}^2\,(x)+c_{02}'^2\,\vartheta_{02}^2\,(x)=c_{13}'^2\,\vartheta_{13}^2\,(x)+c_3'^2\,\vartheta_3^2\,(x)+c_1'^2\,\vartheta_1^2\,(x).$$

Dies läßt sich auch unmittelbar aus einem Sechzehnersystem ablesen, das sich durch Anwendung des Theorems (II.) auf *Weber*s Neunersystem ergibt*):

$$(J_2)\qquad \begin{array}{cccc} c_0\;\vartheta_0'\,(x) & -c_2\;\vartheta_2'\,(x) & c_4\;\vartheta_4'\,(x) & c_{13}'\,\vartheta_{13}\,(x) \\ c_{01}\,\vartheta_{01}'\,(x) & c_{12}\,\vartheta_{12}'\,(x) & -c_{14}\,\vartheta_{14}'\,(x) & c_3'\;\vartheta_3\;(x) \\ -c_{03}\,\vartheta_{03}'\,(x) & c_{23}\,\vartheta_{23}'\,(x) & c_{34}\,\vartheta_{34}'\,(x) & c_1'\;\vartheta_1\;(x) \\ -c_{24}'\,\vartheta_{24}\,(x) & -c_{04}'\,\vartheta_{04}\,(x) & -c_{02}'\,\vartheta_{02}\,(x) & c_5\;\vartheta_5'\;(x). \end{array}$$

Es faßt die ersten Ableitungen der zehn geraden Thetas mit den sechs ungeraden Thetas zusammen.

Noch ein drittes Sechzehnersystem verdient hervorgehoben zu werden, das sich aus dem *Weber*schen System unter Zuhilfenahme des Systems (VI.) ableiten läßt.

Es wird genügen, vier Koeffizienten davon hinzuschreiben, von denen der erste die Koeffizienten $g_{11},\ldots g_{33}$ und die drei anderen die Randkoeffizienten $g_{14},\ldots,g_{41},\ldots,g_{44}$ repräsentieren, wenn ich noch hinzufüge, daß für die Anordnung der sechzehn Thetacharakteristiken wieder die *Caspary*sche Anordnung zugrunde gelegt ist:

$$(J_3)\qquad \left|\begin{array}{ll} c_0\,c_5\,d^2\,\dfrac{\vartheta_0\,(x)}{\vartheta_5\,(x)}-c_{24}'\,c_{13}'\,\vartheta_{24}\,(x)\,\vartheta_{13}\,(x), & -c_5\,c_{13}'\,d\,\dfrac{\vartheta_{13}\,(x)}{\vartheta_5\,(x)} \\ c_5\,c_{24}'\,d\,\dfrac{\vartheta_{24}\,(x)}{\vartheta_5\,(x)}, & -\Omega \end{array}\right|,$$

wo

$$\vartheta_5^2(x)\,\Omega=c_{24}'^2\,\vartheta_{24}^{\;2}\,(x)+c_{04}'^2\,\vartheta_{04}^2\,(x)+c_{02}'^2\,\vartheta_{02}^{\;2}(x)=c_{13}'^2\,\vartheta_{13}^{\;2}\,(x)+c_3'^2\,\vartheta_3^2(x)+c_1'^2\,\vartheta_1^2(x).$$

Für die Nullwerte der Argumente nimmt dieses System die einfache Gestalt an:

---

*) Vgl. Deuxième Congrès intern. Paris 1900, S. 280 und Jahresber. der D. M. V. Bd. 12, S. 104.

$$(J_3')\qquad \begin{array}{ll} c_0\,(c_5\,c_0'' - c_0\,c_5'') & -c_2\,(c_5\,c_2'' - c_2\,c_5'') \\ c_{01}\,(c_5\,c_{01}'' - c_{01}\,c_5'') & c_{12}\,(c_5\,c_{12}'' - c_{12}\,c_5'') \\ -c_{03}\,(c_5\,c_{03}'' - c_{03}\,c_5'') & c_{23}\,(c_5\,c_{23}'' - c_{23}\,c_5'') \\ c_5\,c_{24}'^2 & c_5\,c_{04}'^2 \\ c_4\,(c_5\,c_4'' - c_4\,c_5'') & -c_5\,c_{13}'^2 \\ -c_{14}\,(c_5\,c_{14}'' - c_{14}\,c_5'') & -c_5\,c_3'^2 \\ c_{34}\,(c_5\,c_{34}'' - c_{34}\,c_5'') & -c_5\,c_1'^2 \\ c_5\,c_{02}'^2 & 0, \end{array}$$

wo die g_{i3}, g_{i4} unter die g_{i1}, g_{i2} $(i=1, 2, 3, 4)$ gestellt sind und

$$c'_{\alpha\beta} = \Big(\frac{\partial\,\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_1}\Big)_{x_1=0,\ x_2=0} dx_1 + \Big(\frac{\partial\,\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_2}\Big)_{x_1=0,\ x_2=0} dx_2,$$

$$c''_{\alpha\beta} = \Big(\frac{\partial^2\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_1^{\,2}}\Big)_{x_1=0,\ x_2=0} dx_1^2 + 2\Big(\frac{\partial^2\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_1\,\partial x_2}\Big)_{x_1=0,\ x_2=0} dx_1\,dx_2 + \Big(\frac{\partial^2\vartheta_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_2^{\,2}}\Big)_{x_1=0,\ x_2=0} dx_2^2$$

bzw. gleich einem der Summanden zu setzen ist.

3. *Eine Methode, aus einem Sechzehnersystem durch infinitesimale Transformation seiner Parameter Orthogonalsysteme abzuleiten, mit Anwendung auf das Casparysche System der Thetafunktionen von zwei Argumenten.* — Im Vorhergehenden habe ich eine Methode verwendet, die erlaubt, aus der *Weber*schen Anordnung der zehn geraden Thetacharakteristiken Orthogonalsysteme für die Ableitungen der Thetas zu gewinnen. Ich will jetzt eine andere Methode darlegen, vermittelst deren aus der *Caspary*schen Anordnung (C) aller sechzehn Thetacharakteristiken neue Orthogonalsysteme für die Ableitungen der Thetas entspringen.

Dazu schicke ich zunächst eine Bemerkung über die *Euler-Cayley*sche Parameterdarstellung eines Sechzehnersystems voraus. Nämlich, bilde ich die Ableitungen der Koeffizienten g_{ij}, also etwa

$$dg_{11} = \alpha_1\,d\beta_1 - \alpha_2\,d\beta_2 - \alpha_3\,d\beta_3 + \alpha_4\,d\beta_4 + \beta_1\,d\alpha_1 - \beta_2\,d\alpha_2 - \beta_3\,d\alpha_3 + \beta_4\,d\alpha_4,$$

so genügen diese im allgemeinen nicht mehr den Bedingungen der Orthogonalität. Mache ich aber die Voraussetzung, daß die Argumente des einen Parameterquadrupels von denen des anderen verschieden sind, und differentiiere ich bloß nach den Argumenten eines der beiden Quadrupel, dann bewahrt das System der $d^n g_{ij}$ seinen orthogonalen Charakter

Nunmehr erinnere ich daran, wie *Caspary* zu seiner Anordnung der sechzehn Thetacharakteristiken gelangt ist. Er setzt für die Parameter α_μ, β_μ je dasselbe *Göpel*sche System von Thetas mit verschiedenen Argumenten:

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=\theta_5\,(x_1+y_1, x_2+y_2), \quad \beta_1=\theta_5\,(x_1-y_1, x_2-y_2),\\
\alpha_2&=\theta_{01}(x_1+y_1, x_2+y_2), \quad \beta_2=\theta_{01}(x_1-y_1, x_2-y_2),\\
\alpha_3&=\theta_4\,(x_1+y_1, x_2+y_2), \quad \beta_3=\theta_4\,(x_1-y_1, x_2-y_2),\\
\alpha_4&=\theta_{23}(x_1+y_1, x_2+y_2), \quad \beta_4=\theta_{23}(x_1-y_1, x_2-y_2),
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen θ von den Moduln $2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}$ abhängen, und transformiert die bilinearen Ausdrücke der Form $\alpha_1\beta_{\mu_1} \pm \alpha_2\beta_{\mu_2} \pm \alpha_3\beta_{\mu_3} \pm \alpha_4\beta_{\mu_4}$ unter Benutzung der Formeln für die quadratische Transformation.

Es wird genügen, die weitere Betrachtung an einen dieser Koeffizienten anzuknüpfen, etwa

$$g_{11}=\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4=\vartheta_0(x)\vartheta_0(y).$$

Ich führe ein

$$\begin{aligned}
x_\nu+y_\nu&=\xi_\nu, \quad x_\nu=\frac{\xi_\nu+\eta_\nu}{2},\\
x_\nu-y_\nu&=\eta_\nu, \quad y_\nu=\frac{\xi_\nu-\eta_\nu}{2},
\end{aligned} \qquad (\nu=1\ 2)$$

dann ergibt sich durch Differentiation nach den ξ, die durch einen Strich angedeutet werde:

$$2(\beta_1\alpha_1'-\beta_2\alpha_2'-\beta_3\alpha_3'+\beta_4\alpha_4')=\vartheta_0\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)\vartheta_0'\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)+\vartheta_0\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)\vartheta_0\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big),$$

$$\begin{aligned}
4(\beta_1\alpha_1''-\beta_2\alpha_2''-\beta_3\alpha_3''+\beta_4\alpha_4'')&=\vartheta_0\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)\vartheta_0''\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)+2\,\vartheta_0'\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)\vartheta_0'\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)\\
&\quad+\vartheta_0\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)\vartheta_0''\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)
\end{aligned}$$

und allgemein in symbolischer Schreibweise

$$2^n(\beta_1\alpha_1^{(n)}-\beta_2\alpha_2^{(n)}-\beta_3\alpha_3^{(n)}+\beta_4\alpha_4^{(n)})=\Big[\vartheta_0\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)\vartheta_0'\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)+\vartheta_0\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)\vartheta_0'\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)\Big]^n.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind offenbar die Repräsentanten der Koeffizienten eines orthogonalen Sechzehnersystems, da die vier Thetas eines *Göpel*schen Systems und folglich auch ihre Ableitungen linear unabhängig

sind. Um einfachstmögliche Systeme zu gewinnen, nehme ich das eine Mal η_ν als konstant an, also $\eta_\nu = 2a$ und setze $\xi = 2x$. Alsdann erhalte ich den Satz*):

VII. *Die n-ten Ableitungen der sechzehn Produkte*

$$\vartheta_{\alpha\beta}(x_1+a_1, x_2+a_2)\,\vartheta_{\alpha\beta}(x_1-a_1, x_2-a_2),$$

wo a_1, a_2 Konstante bedeuten, bilden in der Casparyschen Anordnung ein Orthogonalsystem.

Für $a_1 = a_2 = 0$ nimmt das System die einfachere Form an: $\{d^n \vartheta^2_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\}$ d. h.

Die n-ten Ableitungen der Thetaquadrate bilden in der Casparyschen Anordnung die Koeffizienten eines Sechzehnersystems.

Dieser Spezialfall kann auch leicht aus den Thetarelationen gefolgert werden. Es genüge daran zu erinnern, daß, auf Grund der Formeln für die quadratische Transformation, jedes Thetaquadrat und folglich auch dessen Ableitungen durch vier linearunabhängige Thetas mit doppeltem Argument und doppeltem Modul linear dargestellt werden können**).

Das andere Mal wähle ich $\xi = 0$, also $\eta = 2x$, dann verschwinden bei ungerader Anzahl von Differentiationen die Koeffizienten des Orthogonalsystems identisch. Bei gerader Anzahl nehmen sie die Form an

$$n=2:\ \pm[\vartheta(x)\vartheta''(x) - \vartheta'^2(x)],$$
$$n=4:\ \pm[\vartheta(x)\vartheta^{IV}(x) - 4\vartheta'(x)\vartheta'''(x) + 3\vartheta''^2(x)],$$
$$n=6:\ \pm[\vartheta(x)\vartheta^{VI}(x) - 6\vartheta'(x)\vartheta^{V}(x) + 15\vartheta''(x)\vartheta^{IV}(x) + 10\vartheta'''^2(x)] \text{ usw.},$$

wo sich das positive Zeichen auf die geraden, das negative auf die ungeraden Thetacharakteristiken bezieht. Allgemein lautet das Resultat***):

VIII. *Die sechzehn Funktionen*

$$f^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}(x) = \vartheta_{\alpha\beta}(x)\,\vartheta^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}(x) - \binom{2\varrho}{1}\vartheta'_{\alpha\beta}(x)\,\vartheta^{(2\varrho-1)}_{\alpha\beta}(x) + \binom{2\varrho}{2}\vartheta''_{\alpha\beta}(x)\,\vartheta^{(2\varrho-2)}_{\alpha\beta}(x) - \cdots + \frac{1}{2}(-1)^\varrho \binom{2\varrho}{\varrho}\left(\vartheta^{(\varrho)}_{\alpha\beta}(x)\right)^2 \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$$

bilden in der Casparyschen Anordnung die Koeffizienten eines Orthogonalsystems.

---

*) Vgl. Deuxième Congrès intern. Paris 1900, S. 279.

**) Vgl. *Krazer*, Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903, B. G. Teubner, S. 340.

***) Vgl. C. R. Bd. 125, S. 486—489 (1897).

Für $\varrho = 1$ nimmt das System die bemerkenswerte Form an:

$$(J_4)\qquad \begin{array}{rr} \vartheta_0^2(x)\,d^2\ln\vartheta_0(x) & -\vartheta_2^2(x)\,d^2\ln\vartheta_2(x) \\ \vartheta_{01}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{01}(x) & \vartheta_{12}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{12}(x) \\ -\vartheta_{02}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{02}(x) & \vartheta_{23}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{23}(x) \\ \vartheta_{24}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{24}(x) & \vartheta_{04}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{04}(x) \\ \vartheta_4^2(x)\,d^2\ln\vartheta_4(x) & -\vartheta_{13}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{13}(x) \\ -\vartheta_{14}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{14}(x) & -\vartheta_3^2(x)\,d^2\ln\vartheta_3(x) \\ \vartheta_{34}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{34}(x) & -\vartheta_1^2(x)\,d^2\ln\vartheta_1(x) \\ \vartheta_{02}^2(x)\,d^2\ln\vartheta_{02}(x) & \vartheta_5^2(x)\,d^2\ln\vartheta_5(x). \end{array}$$

Werden noch die Argumente gleich Null gesetzt, so erhalte ich das einfache Orthogonalsystem:

$$(J_4')\qquad \begin{array}{rrrr} c_0\,c_0'' & -c_2\,c_2'' & c_4\,c_4'' & c_{13}'^2 \\ c_{01}c_{01}'' & c_{12}c_{12}'' & -c_{14}c_{14}'' & c_3'^2 \\ -c_{03}c_{03}'' & c_{23}c_{23}'' & c_{34}c_{34}'' & c_1'^2 \\ -c_{24}'^2 & -c_{04}'^2 & -c_{02}'^2 & c_5c_5''. \end{array}$$

In dem Fall $\varrho = 2$ begnüge ich mich, das System für die Nullwerte der Argumente hinzuschreiben:

$$(J_5)\qquad \begin{array}{rrrr} c_0\,c_0^{\mathrm{IV}}+3c_0''^2 & -c_2\,c_2^{\mathrm{IV}}-3c_2''^2 & c_4\,c_4^{\mathrm{IV}}+3c_4''^2 & 4c_{13}'c_{13}''' \\ c_{01}c_{01}^{\mathrm{IV}}+3c_{01}''^2 & c_{12}c_{12}^{\mathrm{IV}}+3c_{12}''^2 & -c_{14}c_{14}^{\mathrm{IV}}-3c_{14}''^2 & 4c_3'\,c_3''' \\ -c_{03}c_{03}^{\mathrm{IV}}-3c_{03}''^2 & c_{23}c_{23}^{\mathrm{IV}}+3c_{23}''^2 & c_{34}c_{34}^{\mathrm{IV}}+3c_{34}''^2 & 4c_1'\,c_1''' \\ -4c_{24}'c_{24}''' & -4c_{04}'c_{04}''' & -4c_{02}'c_{02}''' & c_5c_5^{\mathrm{IV}}+3c_5''^2. \end{array}$$

Mit Rücksicht auf die nachfolgende Untersuchung will ich das System (J_4) noch umgestalten. Ich bemerke zunächst, daß die Orthogonalsysteme (J_4) und (J_4') ein gemeinsames Parameterquadrupel besitzen, nämlich die n-ten Ableitungen $\alpha_\mu^{(n)}$ für den Nullwert der Argumente. Ich kann daher von dem zweiten Hilfssatz der Einleitung Gebrauch machen und finde, daß die sechzehn Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_{\alpha\beta}^2(x)}{\vartheta_5^2(x)}\,d^2\ln\vartheta_{\alpha\beta}(x) - \frac{c_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}'' - c_{\alpha\beta}'^2}{c_5^2}$$

in der *Caspary*schen Anordnung ebenfalls eine orthogonale Gruppe bilden.

Ich will jetzt die hyperelliptische $\wp$-Funktion einführen, indem ich sie durch die Gleichung*)

$$(5.) \qquad -d^2 \ln \vartheta_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \wp_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$$

definiere. Hierzu bemerke ich: Würde man an Stelle der Thetafunktion die Sigmafunktion einführen, wie sie von Herrn *Klein**) definiert worden ist, und deren negative zweite logarithmische Ableitung als $\wp$-Funktion auffassen, dann würde die so definierte $\wp$-Funktion von der obigen sich nur durch eine additive Konstante, nämlich $\frac{1}{10}\frac{c''_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta}}$, unterscheiden. Für das Folgende erscheint es einfacher, die obige Definition beizubehalten.

Weiter setze ich

$$\frac{\vartheta^2_{\alpha\beta}(x_1, x_2)}{\vartheta^2_5(x_1, x_2)} = q_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \quad \text{also } q_5(x_1, x_2) = 1,$$

und will noch die sechzehn Funktionen

$$(6.) \qquad q_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \cdot \wp_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + \frac{c_{\alpha\beta}c''_{\alpha\beta} - c'^2_{\alpha\beta}}{c_5^2} = j_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$$

einführen, welche zusammen mit ihren Ableitungen sämtlich an der Stelle $x_1 = 0, x_2 = 0$ verschwinden. Alsdann kann ich die vorstehenden Resultate in die Form kleiden:

IX. *Die sechzehn hyperelliptischen $\wp$-Funktionen, jede multipliziert mit der zugehörigen q-Funktion, d. h. mit dem Quadrat des zugehörigen Thetaquotienten bilden, ebenso wie die sechzehn Funktionen $j_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$, in der Caspary-schen Anordnung die Koeffizienten von Orthogonalsystemen.*

Endlich lassen sich aus den in Satz VIII. aufgestellten Systemen weitere neue Systeme durch Differentiation nach x ableiten, da doch die bilinearen Formen $\alpha_1^{(n)}\beta_{\mu_1}^{(m)} + e_1\alpha_2^{(n)}\beta_{\mu_2}^{(m)} + e_2\alpha_3^{(n)}\beta_{\mu_3}^{(m)} + e_1e_2\alpha_4^{(n)}\beta_{\mu_4}^{(m)}$, wo e_1, e_2 die positive oder negative Einheit bedeuten, ebenfalls zu einer orthogonalen Substitution gehören. Ich erhalte daher Satz**)

---

*) Vgl. *Klein*, Math. Ann. Bd. 27, S. 435, 438; *Bolza*, Amer. Journ. Bd. 17, S. 22 (1895); *Baker*, Abel's Theorem and the allied theory etc., Cambridge 1897, S. 292 und *Baker*, Amer. Journ. Bd. 20, S. 312 (1898).

**) Vgl. Deuxième Congrès internat. Paris 1900, S. 280.

X. *Die n-ten Ableitungen der sechzehn Funktionen* $f_{\alpha\beta}^{(2\varrho)}$, *wie sie in* (VIII.) *definiert worden sind, bilden in der Casparyschen Anordnung die Koeffizienten eines Orthogonalsystems* $(\varrho, n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Für $\varrho = 0$ sagt der Satz aus, daß *auch die n-ten Ableitungen der sechzehn Funktionen* $q_{\alpha\beta}(x) \cdot \wp_{\alpha\beta}(x)$ *und* $j_{\alpha\beta}(x)$ *die Bedingungen einer orthogonalen Substitution erfüllen* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Unter den Systemen, die hieraus für die Nullwerte der Argumente fließen, hebe ich dasjenige für $n = 2$ hervor, welches auf ein Neunersystem zurückführt:

$$(J_6)\quad \begin{matrix} c_0\,c_0^{IV} - c_0''^2 & -c_2\,c_2^{IV} + c_2''^2 & c_4\,c_4^{IV} - c_4''^2 & 0 \\ c_{01}\,c_{01}^{IV} - c_{01}''^2 & c_{12}\,c_{12}^{IV} - c_{12}''^2 & -c_{14}\,c_{14}^{IV} - c_{14}''^2 & 0 \\ -c_{03}\,c_{03}^{IV} + c_{03}''^2 & c_{23}\,c_{23}^{IV} - c_{23}''^2 & c_{34}\,c_{34}^{IV} - c_{34}''^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_5\,c_5^{IV} - c_5''^2. \end{matrix}$$

Aus dem Entstehungsprozeß der Systeme von Funktionen, für welche in dieser Nummer der orthogonale Charakter nachgewiesen worden ist, läßt sich schließen, daß zwischen den Funktionen eines jeden dieser Systeme die gleiche Art der Abhängigkeit besteht, wie sie bei den Thetaquadraten wohlbekannt ist, daß nämlich, allgemein gesprochen, die Funktionen eines jeden Systems durch vier linearunabhängige unter ihnen ausgedrückt werden können. Es ist nun bemerkenswert, daß für die $q\wp$- und j-Funktionen und ihre Ableitungen diese Abhängigkeit eine noch speziellere wird, wie in Nr. 6 dargelegt werden wird.

4. *Die Graßmannsche Fundamentalformel und ein Multiplikationstheorem für orthogonale Sechzehnersysteme.* — **Die im Vorhergehenden aufgestellten Orthogonalsysteme lassen sich mit einander in bemerkenswerten Zusammenhang setzen unter Verwendung eines Multiplikationstheorems, das sich auf orthogonale Sechzehnersysteme bezieht.*) Ich komme zu diesem Theorem vermittelst einer Identität zwischen sechzehn Parametern. Um diese Identität abzuleiten, gehe ich aus von der *Graßmann*schen Fundamentalformel, an welche ich bereits erinnert habe:**

$$[\boldsymbol{ab}|\boldsymbol{cd}] = [\boldsymbol{a}|\boldsymbol{c}]\,[\boldsymbol{b}|\boldsymbol{d}] - [\boldsymbol{a}|\boldsymbol{d}]\,[\boldsymbol{b}|\boldsymbol{c}].$$

---

*) Vgl. Leipziger Ber. 1900, S. 141, 142.

Ich benutze sie in der Gestalt

$$[a_i d_i | b_i c_i] = [a_i | b_i]\,[d_i | c_i] - [a_i | c_i]\,[d_i | b_i]. \qquad (i=1,2,3,4)$$

Indem ich die a_i, b_i, c_i, d_i als extensive Größen eines Gebietes vierter Stufe auffasse, kann ich sie aus vier Einheitszahlen e_1, e_2, e_3, e_4 ableiten und setze an:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & b_1 &= \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4,\\
a_2 &= \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4, & b_2 &= \beta_2 e_1 - \beta_1 e_2 - \beta_4 e_3 + \beta_3 e_4,\\
a_3 &= \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, & b_3 &= \beta_3 e_1 - \beta_4 e_2 - \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4,\\
a_4 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4, & b_4 &= \beta_4 e_1 - \beta_3 e_2 - \beta_2 e_3 + \beta_1 e_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4, & d_1 &= \delta_1 e_1 - \delta_2 e_2 - \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4,\\
c_2 &= \gamma_2 e_1 + \gamma_1 e_2 - \gamma_4 e_3 - \gamma_3 e_4, & d_2 &= \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4,\\
c_3 &= \gamma_3 e_1 - \gamma_4 e_2 + \gamma_1 e_3 - \gamma_2 e_4, & d_3 &= \delta_1 e_1 - \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 - \delta_4 e_4,\\
c_4 &= \gamma_4 e_1 - \gamma_3 e_2 - \gamma_2 e_3 + \gamma_1 e_4, & d_4 &= -\delta_1 e_1 - \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4.
\end{aligned}$$

Die vier Einheitsgrößen genügen den bekannten Festsetzungen

$$\begin{aligned}
e_i\, e_k &= -\, e_k\, e_i,\\
e_i | e_k &= \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k, \end{cases} \qquad (i,k,l=1,2,3)\\
e_i\, e_k | e_i\, e_l &= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die inneren Produkte der Fundamentalformel nehmen dann Werte an, die ich im Hinblick auf die *Euler-Cayley*sche Parameterdarstellung (S_2) so schreiben kann:

$$\begin{aligned}
a_1|b_1 &= (\alpha\beta)_{11}, & a_2|b_2 &= -(\alpha\beta)_{12}, & a_3|b_3 &= (\alpha\beta)_{13}, & a_4|b_4 &= (\alpha\beta)_{14},\\
c_1|d_1 &= (\gamma\delta)_{11}, & c_2|d_2 &= -(\gamma\delta)_{12}, & c_3|d_3 &= (\gamma\delta)_{13}, & c_4|d_4 &= (\gamma\delta)_{14},\\
a_1|c_1 &= (\alpha\gamma)_{44}, & a_2|c_2 &= (\alpha\gamma)_{34}, & a_3|c_3 &= (\alpha\gamma)_{24}, & a_4|c_4 &= (\alpha\gamma)_{14},\\
b_1|d_1 &= (\beta\delta)_{44}, & b_2|d_2 &= -(\beta\delta)_{34}, & b_3|d_3 &= -(\beta\delta)_{24}, & b_4|d_4 &= (\beta\delta)_{14},
\end{aligned}$$

wobei ich die Koeffizienten der Sechzehnersysteme, die aus je zweien der Parameterquadrupel α_μ, β_μ, γ_μ, δ_μ aufgebaut sind, durch $(\alpha\beta)_{ik}$, $(\gamma\delta)_{ik}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\delta)_{ik}$ bezeichnet habe, um ihren Ursprung sichtbar zu machen.

Ich bilde weiter die äußeren Produkte $a_i d_i$ und $b_i c_i$ sowie das innere Produkt $a_i d_i | b_i c_i$. Summiere ich endlich über $i = 1, 2, 3, 4$, so

zeigt sich, daß die Summe $\sum_i [a_i d_i | b_i c_i]$ identisch verschwindet. Hieraus entsteht die Identität:

$$\text{(XI.)} \quad \begin{cases} (\alpha\beta)_{11}(\gamma\delta)_{11} + (\alpha\beta)_{12}(\gamma\delta)_{12} + (\alpha\beta)_{13}(\gamma\delta)_{13} + (\alpha\beta)_{14}(\gamma\delta)_{14} \\ = (\alpha\gamma)_{44}(\beta\delta)_{44} - (\alpha\gamma)_{34}(\beta\delta)_{34} - (\alpha\gamma)_{24}(\beta\delta)_{24} + (\alpha\gamma)_{14}(\beta\delta)_{14}, \end{cases}$$

und das ist eine Identität zwischen sechzehn beliebigen Parametern, denn bei ihrer Herleitung ist von den Orthogonalitätsbedingungen kein Gebrauch gemacht worden. Diese Feststellung ist von Wichtigkeit, wenn es sich darum handelte, aus der Identität die Additionstheoreme der Thetafunktionen abzuleiten.

Für das Folgende fasse ich die Identität als bilineare Relation zwischen den Koeffizienten von vier der Orthogonalsysteme auf, die sich aus vier Parameterquadrupeln zusammensetzen lassen, und leite daraus ein Multiplikationstheorem für Sechzehnersysteme her.

Zu dem Zweck wende ich auf (XI.) die Substitutionen an:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_2 & -\delta_1 & -\delta_4 & \delta_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ -\delta_3 & -\delta_4 & \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_4 & -\delta_3 & \delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix},$$

dann kann ich das System der resultierenden sechzehn Identitäten zusammenfassen in das folgende Multiplikationstheorem:

$$\begin{vmatrix} (\alpha\beta)_{11} & (\alpha\beta)_{12} & (\alpha\beta)_{13} & (\alpha\beta)_{14} \\ -(\alpha\beta)_{12} & (\alpha\beta)_{11} & -(\alpha\beta)_{14} & (\alpha\beta)_{13} \\ -(\alpha\beta)_{13} & (\alpha\beta)_{14} & (\alpha\beta)_{11} & -(\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{14} & (\alpha\beta)_{13} & -(\alpha\beta)_{12} & -(\alpha\beta)_{11} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (\gamma\delta)_{11} & (\gamma\delta)_{12} & (\gamma\delta)_{13} & (\gamma\delta)_{14} \\ (\gamma\delta)_{21} & (\gamma\delta)_{22} & (\gamma\delta)_{23} & (\gamma\delta)_{24} \\ (\gamma\delta)_{31} & (\gamma\delta)_{32} & (\gamma\delta)_{33} & (\gamma\delta)_{34} \\ -(\gamma\delta)_{41} & -(\gamma\delta)_{42} & -(\gamma\delta)_{43} & -(\gamma\delta)_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\alpha\gamma)_{44} & (\alpha\gamma)_{34} & -(\alpha\gamma)_{24} & -(\alpha\gamma)_{14} \\ (\alpha\gamma)_{43} & (\alpha\gamma)_{33} & -(\alpha\gamma)_{23} & -(\alpha\gamma)_{13} \\ -(\alpha\gamma)_{42} & -(\alpha\gamma)_{32} & (\alpha\gamma)_{22} & (\alpha\gamma)_{12} \\ -(\alpha\gamma)_{41} & -(\alpha\gamma)_{31} & (\alpha\gamma)_{21} & (\alpha\gamma)_{11} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{24} & -(\beta\delta)_{14} \\ (\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{14} & -(\beta\delta)_{24} \\ -(\beta\delta)_{24} & (\beta\delta)_{14} & (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{34} \\ (\beta\delta)_{14} & (\beta\delta)_{24} & (\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{44} \end{vmatrix}.$$

Die Multiplikation ist dabei so zu verstehen, daß die i-te Horizontalreihe des ersten, mit der k-ten Horizontalreihe des zweiten Systems multi-

pliziert, gleich dem Produkt der entsprechenden Horizontalreihen des dritten und vierten Systems wird.

Die auftretenden Systeme sind, wie man sich leicht überzeugt, sämtlich *Orthogonalsysteme,* insbesondere sind die Systeme $\{\alpha\beta\}$ und $\{\beta\delta\}$ *Elementarsysteme.* Bezeichne ich die letzteren durch $\{\alpha\beta\}'$ und $\{\beta\delta\}'$, dann kann ich symbolisch schreiben:

$$\text{(XII.)} \qquad \{\alpha\beta\}' \times \{\gamma\delta\} = \{\alpha\gamma\} \times \{\beta\delta\}',$$

und ich kann sagen: Multipliziert man ein Sechzehnersystem $\{\gamma\delta\}$ mit einem Elementarsystem $\{\alpha\beta\}'$, dessen Koeffizienten mit den Koeffizienten der ersten Horizontalreihe des Sechzehnersystems $\{\alpha\beta\}$ übereinstimmen, dann ergibt sich ein Orthogonalsystem, das sich durch die Vertauschung $\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\\ \beta\,\delta\,\alpha\,\gamma\end{pmatrix}$ nicht ändert, wenn ich gleichzeitig die erste, zweite, dritte, vierte Horizontalreihe mit der vierten, dritten, zweiten, ersten Vertikalreihe vertausche.

Durch weitere geeignete Parametersubstitutionen läßt sich nun erreichen, daß als Koeffizienten des Elementarsystems $\{\alpha\beta\}'$ die Koeffizienten einer *beliebigen* Horizontalen oder Vertikalen auftreten.

Dem Multiplikationstheorem (XII.) läßt sich noch ein anderes an die Seite setzen, das entsteht, wenn ich auf die Identität (XI.) die Substitutionen anwende:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4\\ \delta_2 & -\delta_1 & -\delta_4 & \delta_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4\\ -\delta_3 & -\delta_4 & \delta_1 & \delta_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4\\ \delta_4 & -\delta_3 & \delta_2 & -\delta_1\end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{matrix}(\alpha\beta)_{11} & (\alpha\beta)_{12} & (\alpha\beta)_{13} & (\alpha\beta)_{14}\\ (\alpha\beta)_{21} & (\alpha\beta)_{22} & (\alpha\beta)_{23} & (\alpha\beta)_{24}\\ (\alpha\beta)_{31} & (\alpha\beta)_{32} & (\alpha\beta)_{33} & (\alpha\beta)_{34}\\ (\alpha\beta)_{41} & (\alpha\beta)_{42} & (\alpha\beta)_{43} & (\alpha\beta)_{44}\end{matrix} \times \begin{matrix}(\gamma\delta)_{11} & (\gamma\delta)_{12} & (\gamma\delta)_{13} & (\gamma\delta)_{14}\\ (\gamma\delta)_{21} & (\gamma\delta)_{22} & (\gamma\delta)_{23} & (\gamma\delta)_{24}\\ (\gamma\delta)_{31} & (\gamma\delta)_{32} & (\gamma\delta)_{33} & (\gamma\delta)_{34}\\ -(\gamma\delta)_{41} & -(\gamma\delta)_{42} & -(\gamma\delta)_{43} & -(\gamma\delta)_{44}\end{matrix}$$

$$= \begin{matrix}(\alpha\gamma)_{44} & (\alpha\gamma)_{34} & -(\alpha\gamma)_{24} & -(\alpha\gamma)_{14}\\ -(\alpha\gamma)_{34} & (\alpha\gamma)_{44} & (\alpha\gamma)_{14} & -(\alpha\gamma)_{24}\\ (\alpha\gamma)_{24} & -(\alpha\gamma)_{14} & (\alpha\gamma)_{44} & -(\alpha\gamma)_{34}\\ -(\alpha\gamma)_{14} & -(\alpha\gamma)_{24} & -(\alpha\gamma)_{34} & -(\alpha\gamma)_{44}\end{matrix} \times \begin{matrix}(\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{24} & -(\beta\delta)_{14}\\ (\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{14} & -(\beta\delta)_{24}\\ -(\beta\delta)_{24} & (\beta\delta)_{14} & (\beta\delta)_{44} & -(\beta\delta)_{34}\\ (\beta\delta)_{14} & (\beta\delta)_{24} & (\beta\delta)_{34} & (\beta\delta)_{44}\end{matrix}$$

oder symbolisch geschrieben:

$$\text{(XIII.)} \qquad \{\alpha\beta\} \times \{\gamma\delta\} = \{\alpha\gamma\}' \times \{\beta\delta\}',$$

d. h. aus der Multiplikation zweier Sechzehnersysteme $\{\alpha\beta\}$ und $\{\gamma\delta\}$ entspringt dasselbe Orthogonalsystem, wie wenn ich zwei *Elementarsysteme* $\{\alpha\gamma\}'$ und $\{\beta\delta\}'$ mit einander multipliziere, deren Koeffizienten mit den Koeffizienten der vierten Vertikalreihe der Sechzehnersysteme $\{\alpha\gamma\}$ und $\{\beta\delta\}$ übereinstimmen. Auch hier kann ich natürlich durch passende Substitutionen erreichen, daß in die Elementarsysteme die Koeffizienten einer *beliebigen* Horizontalen oder Vertikalen eingehen.

Von diesen Sätzen werde ich im folgenden nur den speziellen Fall $\delta = \beta$ verwenden. Alsdann verschwinden die Koeffizienten $(\beta\delta)_{14}$, $(\beta\delta)_{24}$, $(\beta\delta)_{34}$, und der Koeffizient $(\beta\delta)_{44}$ wird gleich $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2$. Die beiden Sätze*) (XII.) und (XIII.) lassen sich dann wie folgt aussprechen:

$$\text{(XIV.)} \qquad \{\alpha\beta\}' \times \{\gamma\beta\} = \{\alpha\gamma\} \cdot \Sigma\beta^2,$$

$$\text{(XV.)} \qquad \{\alpha\beta\} \times \{\gamma\beta\} = \{\alpha\gamma\}' \cdot \Sigma\beta^2.$$

Dabei verdient noch hervorgehoben zu werden, daß bei Vertauschung zweier Parameter, etwa α und β, die Randkoeffizienten $(\alpha\beta)_{14}$, $(\alpha\beta)_{24}$, $(\alpha\beta)_{34}$; $(\alpha\beta)_{41}$, $(\alpha\beta)_{42}$, $(\alpha\beta)_{43}$ des Systems $\{\alpha\beta\}$ ihr Vorzeichen wechseln.

5. *Die hyperelliptischen $\wp$-Funktionen. Die Rosenhainschen und Göpelschen Relationen unter den $q\wp$-Funktionen.* — Die Identitäten, welche ich in der vorigen Nummer aufgestellt habe, erweisen sich für die Theorie der Thetas von zwei Argumenten als recht brauchbar. So ist es möglich, aus ihnen die Additionstheoreme für die Thetas unmittelbar abzuleiten**). Gegenwärtig will ich sie benutzen, um den Zusammenhang unter den sechzehn hyperelliptischen $\wp$-Funktionen näher zu untersuchen.

Ich ersetze die Parameter α_μ durch ihre 2ϱ-ten Ableitungen $\alpha_\mu^{(2\varrho)}$, wähle für die drei Quadrupel $\alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ wieder je dasselbe *Göpel*sche System der Thetas mit doppelten Moduln, wie in Nr. 3., und nehme bei den Quadrupeln $\alpha_\mu^{(2\varrho)}$ und β_μ die Argumente gleich Null. Alsdann werden die Koeffizienten des Sechzehnersystems $\{\alpha^{(2\varrho)}\gamma\}$ gleich den Funk-

*) deren erster bereits in den Leipziger Berichten 1900, S. 141, 142 mitgeteilt worden ist.

**) Vgl. Sitzungsber. der Berl. Math. Ges. Bd. 6, S. 59—68.

tionen $f^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}(x)$, wie sie in (VIII.) definiert worden sind, und die Koeffizienten des Elementarsystems $\{\alpha^{(2\varrho)}\beta\}'$ gleich Nullwerten der $f^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}(x)$, die ich mit $C^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}$ bezeichnen will. Weiter, das System $\{\alpha\beta\}$ geht in das System der Thetaquadrate $\{\vartheta^2_{\alpha\beta}(x)\}$ über, und endlich $\Sigma\beta^2$ wird gleich c_5^2.

Hiernach erlaubt das Theorem (XIV.), die sechzehn Funktionen $c_5^2 f^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}(x)$, welche aus den ϱ-ten, $(\varrho+1)$-ten, ... 2ϱ-ten Ableitungen der Thetas homogen zusammengesetzt sind, vermittelst der Thetaquadrate darzustellen, wobei als Koeffizienten die Konstanten $C^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}$ auftreten.

Ich will für die weitere Betrachtung den Fall $\varrho=1$ zugrunde legen, wobei ich ausdrücklich bemerke, daß dies nur der einfacheren Schreibweise wegen geschieht, da *die weitere Untersuchung auch auf die allgemeinen Funktionen* $f^{(2\varrho)}_{\alpha\beta}(x)$ *anwendbar bleibt.*

Ich beginne damit, in dem Fall $\varrho=1$ die in Rede stehende Darstellung explizite hinzuschreiben. Hier werden die

$$f^{(2)}_{\alpha\beta}(x)=\vartheta^2_{\alpha\beta}(x)d^2\ln\vartheta_{\alpha\beta}(x)$$

und die Konstanten

$$C^{(2)}_{\alpha\beta}=c_{\alpha\beta}c''_{\alpha\beta}-c'^2_{\alpha\beta}.$$

Wegen der Homogeneität der Relationen darf ich, nach Division durch $c_5^2\vartheta_5^2(x)$, an Stelle der $f^{(2)}_{\alpha\beta}(x)$ die Funktionen $q_{\alpha\beta}(x)\wp_{\alpha\beta}(x)$ und an Stelle der $C^{(2)}_{\alpha\beta}$ die Konstanten $-\frac{c_{\alpha\beta}c''_{\alpha\beta}-c'^2_{\alpha\beta}}{c_5^2}$ einführen, wonach das Multiplikationstheorem (XIV.) die Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} c_0c''_0 & -c_2\,c''_2 & c_4c''_4 & c'^2_{13} \\ c_2c''_2 & c_0\,c''_0 & -c'^2_{13} & c_4c''_4 \\ -c_4c''_4 & c'^2_{13} & c_0c''_0 & c_2c''_2 \\ c'^2_{13} & c_4c''_4 & c_2c''_2 & -c_0c''_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_0(x) & -q_2(x) & q_4(x) & q_{13}(x) \\ q_{01}(x) & q_{12}(x) & -q_{14}(x) & q_3(x) \\ -q_{03}(x) & q_{23}(x) & q_{34}(x) & q_1(x) \\ q_{24}(x) & q_{04}(x) & q_{02}(x) & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -c_5^2 \times \begin{vmatrix} \wp_5(x) & -q_1(x)\wp_1(x) & q_3(x)\wp_3(x) & q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ q_{02}(x)\wp_{02}(x) & q_{34}(x)\wp_{34}(x) & q_{14}(x)\wp_{14}(x) & -q_4(x)\wp_4(x) \\ -q_{04}(x)\wp_{04}(x) & -q_{23}(x)\wp_{23}(x) & q_{12}(x)\wp_{12}(x) & -q_2(x)\wp_2(x) \\ -q_{24}(x)\wp_{24}(x) & q_{03}(x)\wp_{03}(x) & q_{01}(x)\wp_{01}(x) & q_0(x)\wp_0(x) \end{vmatrix}$$

Ihm entspricht das folgende Formelsystem*):

$$(J_7)\quad\begin{cases}
-c_0c_0''q_0(x)-c_2c_2''q_2(x)-c_4c_4''q_4(x)-c_{13}'^2q_{13}(x)=c_5^2\wp_5(x),\\
-c_2c_2''q_0(x)+c_0c_0''q_2(x)+c_{13}'^2q_4(x)-c_4c_4''q_{13}(x)=c_5^2q_{02}(x)\wp_{02}(x),\\
-c_4c_4''q_0(x)-c_{13}'^2q_2(x)+c_0c_0''q_4(x)+c_2c_2''q_{13}(x)=c_5^2q_{04}(x)\wp_{04}(x),\\
c_{13}'^2q_0(x)-c_4c_4''q_2(x)+c_2c_2''q_4(x)-c_0c_0''q_{13}(x)=c_5^2q_{24}(x)\wp_{24}(x),\\
c_0c_0''q_{01}(x)-c_2c_2''q_{12}(x)-c_4c_4''q_{14}(x)+c_{13}'^2q_3(x)=c_5^2q_1(x)\wp_1(x),\\
-c_2c_2''q_{01}(x)-c_0c_0''q_{12}(x)-c_{13}'^2q_{14}(x)-c_4c_4''q_3(x)=c_5^2q_{34}(x)\wp_{34}(x),\\
-c_4c_4''q_{01}(x)+c_{13}'^2q_{12}(x)-c_0c_0''q_{14}(x)+c_2c_2''q_3(x)=c_5^2q_{23}(x)\wp_{23}(x),\\
-c_{13}'^2q_{01}(x)-c_4c_4''q_{12}(x)+c_2c_2''q_{14}(x)+c_0c_0''q_3(x)=c_5^2q_{03}(x)\wp_{03}(x),\\
c_0c_0''q_{03}(x)+c_2c_2''q_{23}(x)-c_4c_4''q_{34}(x)-c_{13}'^2q_1(x)=c_5^2q_3(x)\wp_3(x),\\
c_2c_2''q_{03}(x)-c_0c_0''q_{23}(x)+c_{13}'^2q_{34}(x)-c_4c_4''q_1(x)=c_5^2q_{14}(x)\wp_{14}(x),\\
-c_4c_4''q_{03}(x)-c_{13}'^2q_{23}(x)-c_0c_0''q_{34}(x)-c_2c_2''q_1(x)=c_5^2q_{12}(x)\wp_{12}(x),\\
c_{13}'^2q_{03}(x)-c_4c_4''q_{23}(x)-c_2c_2''q_{34}(x)+c_0c_0''q_1(x)=c_5^2q_{01}(x)\wp_{01}(x),\\
-c_0c_0''q_{24}(x)+c_2c_2''q_{04}(x)-c_4c_4''q_{02}(x)+c_{13}'^2=c_5^2q_{13}(x)\wp_{13}(x),\\
c_2c_2''q_{24}(x)+c_0c_0''q_{04}(x)-c_{13}'^2q_{02}(x)-c_4c_4''=c_5^2q_4(x)\wp_4(x),\\
-c_4c_4''q_{24}(x)+c_{13}'^2q_{04}(x)+c_0c_0''q_{02}(x)-c_2c_2''=c_5^2q_2(x)\wp_2(x),\\
-c_{13}'^2q_{24}(x)-c_4c_4''q_{04}(x)-c_2c_2''q_{02}(x)-c_0c_0''=c_5^2q_0(x)\wp_0(x).
\end{cases}$$

Die Darstellung der sechzehn Funktionen $q_{\alpha\beta}(x)\wp_{\alpha\beta}(x)$ vermittelst der $q_{\alpha\beta}(x)$ ist nun auf mehrfache Weise möglich. Dies läßt sich erkennen, sobald man das andere Theorem (XV.) heranzieht. Diesem entspringt nämlich das System:

$$\begin{vmatrix} c_0c_0'' & -c_2c_2'' & c_4c_4'' & c_{13}'^2\\ c_{01}c_{01}'' & c_{12}c_{12}'' & -c_{14}c_{14}'' & c_3'^2\\ -c_{03}c_{03}'' & c_{23}c_{23}'' & c_{34}c_{34}'' & c_1'^2\\ -c_{24}'^2 & -c_{04}'^2 & -c_{02}'^2 & c_5c_5'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_0(x) & -q_2(x) & q_4(x) & q_{13}(x)\\ q_{01}(x) & q_{12}(x) & -q_{14}(x) & q_3(x)\\ -q_{03}(x) & q_{23}(x) & q_{34}(x) & q_1(x)\\ q_{24}(x) & q_{04}(x) & q_{02}(x) & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -c_5^2 \times \begin{vmatrix} \wp_5(x) & -q_1(x)\wp_1(x) & q_3(x)\wp_3(x) & q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\ q_1(x)\wp_1(x) & \wp_5(x) & -q_{13}(x)\wp_{13}(x) & q_3(x)\wp_3(x)\\ -q_3(x)\wp_3(x) & q_{13}(x)\wp_{13}(x) & \wp_5(x) & q_1(x)\wp_1(x)\\ q_{13}(x)\wp_{13}(x) & q_3(x)\wp_3(x) & q_1(x)\wp_1(x) & -\wp_5(x) \end{vmatrix},$$

*) Vgl. *Koenigsberger*, dieses Journal Bd. 65, S. 342.

woraus für vier der Funktionen $q_{\alpha\beta}(x)\wp_{\alpha\beta}(x)$ bereits vier Darstellungen vermittelst der Thetaquadrate hervorgehen.

Aus derselben Quelle fließen durch geeignete Parametersubstitutionen oder — was auf dasselbe hinausläuft — aus dem hingeschriebenen System durch Vermehrung der Argumente um halbe Perioden — analoge Systeme für die noch fehlenden zwölf Funktionen $q_{\alpha\beta}(x)\wp_{\alpha\beta}(x)$. Und so erhält man jedes der $q_{\alpha\beta}(x)\wp_{\alpha\beta}(x)$ zunächst auf vier verschiedene Weisen vermittelst der $q_{\alpha\beta}(x)$ ausgedrückt. Ich begnüge mich, diese Ausdrücke für vier der $q_{\alpha\beta}\wp_{\alpha\beta}$ hinzuschreiben:

$$
\begin{aligned}
c_0\,c_0''\,q_0\,(x)+c_2\,c_2''\,q_2\,(x)+c_4\,c_4''\,q_4\,(x)+c_{13}'^2 q_{13}(x) &= -c_5^2\wp_5(x),\\
c_{01}c_{01}''q_{01}(x)+c_{12}c_{12}''q_{12}(x)+c_{14}c_{14}''q_{14}(x)+c_3'^2\,q_3\,(x) &= -c_5^2\wp_5(x),\\
c_{03}c''_3\,q_{03}(x)+c_{23}c_{23}''q_{23}(x)+c_{34}c_{34}''q_{34}(x)+c_1'^2\,q_1\,(x) &= -c_5^2\wp_5(x),\\
c_{24}'^2\quad q_{24}(x)+c_{04}'^2\quad q_{04}(x)+c_{02}'^2\quad q_{02}(x)+c_5c_5'' &= -c_5^2\wp_5(x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_0\,c_0''\,q_{01}(x)-c_2\,c_2''\,q_{12}(x)-c_4\,c_4''\,q_{14}(x)+c_{13}'^2\,q_3\,(x) &= c_5^2 q_1(x)\wp_1(x),\\
-c_{01}c_{01}''q_0\,(x)+c_{12}c_{12}''q_2\,(x)+c_{14}c_{14}''q_4\,(x)-c_3'^2\,q_{13}(x) &= c_5^2 q_1(x)\wp_1(x),\\
c_{03}c_{03}''q_{24}(x)-c_{23}c_{23}''q_{04}(x)-c_{34}c_{34}''q_{02}\,(x)+c_1'^2 &= c_5^2 q_1(x)\wp_1(x),\\
-c_{24}'^2\quad q_{03}(x)+c_{04}'^2\quad q_{23}(x)+c_{02}'^2\quad q_{34}\,(x)-c_5c_5''\,q_1(x) &= c_5^2 q_1(x)\wp_1(x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_0\,c_0''\,q_{03}(x)+c_2\,c_2''\,q_{23}(x)-c_4\,c_4''\,q_{34}(x)-c_{13}'^2 q_1\,(x) &= c_5^2 q_3(x)\wp_3\,(x),\\
-c_{01}c_{01}''q_{24}(x)-c_{12}c_{12}''q_{04}(x)+c_{14}c_{14}''q_{02}(x)+c_3'^2 &= c_5^2 q_3(x)\wp_3(x),\\
-c_{03}c_{03}''q_0\,(x)-c_{23}c_{23}''q_2\,(x)+c_{34}c_{34}''q_4\,(x)+c_1'^2\,q_{13}\,(x) &= c_5^2 q_3(x)\wp_3(x),\\
c_{24}'^2\quad q_{01}\,(x)+c_{04}'^2\quad q_{12}(x)-c_{20}'^2\quad q_{14}(x)-c_5c_5''\,q_3\,(x) &= c_5^2 q_3(x)\wp_3(x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-c_0\,c_0''\,q_{24}(x)+c_2\,c_2''\,q_{04}(x)-c_4\,c_4''\,q_{02}(x)+c_{13}'^2 &= c_5^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x),\\
-c_{01}c_{01}''q_{03}(x)+c_{12}c_{12}''q_{23}(x)-c_{14}c_{14}''q_{34}(x)+c_3'^2\quad q_1\,(x) &= c_5^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x),\\
c_{03}c_{03}''q_{01}(x)-c_{23}c_{23}''q_{12}(x)+c_{34}c_{34}''q_{14}(x)-c_1'^2\quad q_3\,(x) &= c_5^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x),\\
c_{24}'^2\quad q_0\,(x)-c_{04}'^2\quad q_2\,(x)+c_{02}'^2\quad q_4\,(x)-c_5c_5''\,q_{13}(x) &= c_5^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x).
\end{aligned}
$$

Hinzu kommen noch weitere Systeme dadurch, daß ich in (XV.) die Vertikal- mit den Horizontalreihen vertausche. Das geschieht durch Anwendung der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & -\gamma_1 & -\delta_1\end{pmatrix}$, welche die $(\alpha\beta)_{ij}$ in $(\alpha\beta)_{ji}$, die $(\gamma\delta)_{ij}$ in $(\gamma\delta)_{ji}$ usw. umwandelt. Es genüge, das erste der vier neuen Systeme hinzuschreiben:

$$\begin{array}{cccc} c_0 c_0'' & c_{01} c_{01}'' & -c_{03} c_{03}'' & -c_{24}'^2 \\ -c_2 c_2'' & c_{12} c_{12}'' & c_{23} c_{23}'' & -c_{04}'^2 \\ c_4 c_4'' & -c_{14} c_{14}'' & c_{34} c_{34}'' & -c_{02}'^2 \\ c_{13}'^2 & c_3'^2 & c_1'^2 & c_5 c_5'' \end{array} \times \begin{array}{cccc} q_0(x) & q_{01}(x) & -q_{03}(x) & -q_{24}(x) \\ -q_2(x) & q_{12}(x) & q_{23}(x) & -q_{04}(x) \\ q_4(x) & -q_{14}(x) & q_{34}(x) & -q_{02}(x) \\ -q_{13}(x) & -q_3(x) & -q_1(x) & -1 \end{array}$$

$$= -c_5^2 \times \begin{array}{cccc} \wp_5(x) & q_{02}(x)\wp_{02}(x) & -q_{04}(x)\wp_{04}(x) & -q_{24}(x)\wp_{24}(x) \\ -q_{02}(x)\wp_{02}(x) & \wp_5(x) & q_{24}(x)\wp_{24}(x) & -q_{04}(x)\wp_{04}(x) \\ q_{04}(x)\wp_{04}(x) & -q_{24}(x)\wp_{24}(x) & \wp_5(x) & -q_{02}(x)\wp_{02}(x) \\ -q_{24}(x)\wp_{24}(x) & -q_{04}(x)\wp_{04}(x) & -q_{02}(x)\wp_{02}(x) & -\wp_5(x). \end{array}$$

Hiernach ergeben sich für jedes Produkt einer hyperelliptischen $\wp$-Funktion mit einem Thetaquadrate gleicher Charakteristik *acht* homogene lineare Darstellungen durch vier Thetaquadrate*).

Ich habe also $8 \cdot 16$ Gleichungen, die ich auch als acht Systeme linearer Gleichungen für die $q_{\alpha\beta}(x)$ auffassen kann. Ihre Auflösung liefert die $q_{\alpha\beta}(x)$ linear ausgedrückt durch je vier Funktionen $q_{\alpha\beta}(x)\wp_{\alpha\beta}(x)$, und für jedes $q_{\alpha\beta}(x)$ ergeben sich acht solcher Ausdrücke. Für die Auflösung der Gleichungen ist zu beachten, daß die sechzehn Konstanten $c_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}'' - c_{\alpha\beta}'^2$ in der *Casparyschen* Anordnung ein Orthogonalsystem bilden [vgl. (J_4')].

Ich greife zunächst vier Gleichungen heraus, welche linker Hand das Vierersystem $q_0(x)$, $q_2(x)$, $q_4(x)$, $q_{13}(x)$ führen; sodann die Gleichungssysteme mit den Vierersystemen q_{01}, q_{12}, q_{14}, q_3 bzw. q_{03}, q_{23}, q_{34}, q_1 und q_{24}, q_{04}, q_{02}, q_5 und gewinne durch deren Auflösung:

$$(J_8)\quad \begin{cases} C q_0(x) = -c_0 c_0'' \wp_5(x) - c_{01} c_{01}'' q_1(x)\wp_1(x) - c_{03} c_{03}'' q_3(x)\wp_3(x) + c_{24}'^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ C q_2(x) = -c_2 c_2'' \wp_5(x) + c_{12} c_{12}'' q_1(x)\wp_1(x) - c_{23} c_{23}'' q_3(x)\wp_3(x) - c_{04}'^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ C q_4(x) = -c_4 c_4'' \wp_5(x) + c_{14} c_{14}'' q_1(x)\wp_1(x) + c_{34} c_{34}'' q_3(x)\wp_3(x) + c_{02}'^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ C q_{13}(x) = -c_{13}'^2 \wp_5(x) - c_3'^2 q_1(x)\wp_1(x) + c_1'^2 q_3(x)\wp_3(x) - c_5 c_5'' q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ C q_{01}(x) = -c_{01} c_{01}'' \wp_5(x) + c_0 c_0'' q_1(x)\wp_1(x) + c_{24}'^2 q_3(x)\wp_3(x) + c_{03} c_{03}'' q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ C q_{12}(x) = -c_{12} c_{12}'' \wp_5(x) - c_2 c_2'' q_1(x)\wp_1(x) + c_{04}'^2 q_3(x)\wp_3(x) - c_{23} c_{23}'' q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ C q_{14}(x) = -c_{14} c_{14}'' \wp_5(x) - c_4 c_4'' q_1(x)\wp_1(x) - c_{02}'^2 q_3(x)\wp_3(x) + c_{34} c_{34}'' q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ C q_3(x) = -c_3'^2 \wp_5(x) + c_{13}'^2 q_1(x)\wp_1(x) - c_5 c_5'' q_3(x)\wp_3(x) - c_1'^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x) \end{cases}$$

*) Vgl. die Notiz in C. R. Bd. 126, S. 1083 bis 1085 (1898).

$$(J_8)\quad\begin{cases}
C\,q_{03}(x) = -c_{03}\,c''_{03}\wp_5(x) - c'^2_{24} \quad q_1(x)\wp_1(x) + c_0\;c''_0\;q_3(x)\wp_3(x) - c_{01}\,c''_{01}\,q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\
C\,q_{23}(x) = -c_{23}\,c''_{23}\wp_5(x) + c'^2_{04} \quad q_1(x)\wp_1(x) + c_2\;c''_2\;q_3(x)\wp_3(x) + c_{12}\,c''_{12}\,q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\
C\,q_{34}(x) = -c_{34}\,c''_{34}\wp_5(x) + c'^2_{02} \quad q_1(x)\wp_1(x) - c_4\;c''_4\;q_3(x)\wp_3(x) - c_{14}\,c''_{14}\,q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\
C\,q_1(x) = -c'^2_1 \quad \wp_5(x) - c_5\;c''_5\,q_1(x)\wp_1(x) - c'^2_{13} \quad q_3(x)\wp_3(x) + c'^2_3\,q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\
C\,q_{24}(x) = -c'^2_{24} \quad \wp_5(x) + c_{03}\,c''_{03}\,q_1(x)\wp_1(x) - c_{01}\,c''_{01}\,q_3(x)\wp_3(x) - c_0\;c''_0\;q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\
C\,q_{04}(x) = -c'^2_{04} \quad \wp_5(x) - c_{23}\,c''_{23}\,q_1(x)\wp_1(x) - c_{12}\,c''_{12}\,q_3(x)\wp_3(x) + c_2\;c''_2\;q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\
C\,q_{02}(x) = -c'^2_{02} \quad \wp_5(x) - c_{34}\,c''_{34}\,q_1(x)\wp_1(x) + c_{14}\,c''_{14}\,q_3(x)\wp_3(x) - c_4\;c''_4\;q_{13}(x)\wp_{13}(x)\\
C = -c\;c''_5\,\wp_5(x) + c'^2_1 \quad q_1(x)\wp_1(x) + c'^2_3 \quad q_3(x)\wp_3(x) + c'^2_{13} \quad q_{13}(x)\wp_{13}(x),
\end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned}
C\,c_5^2 &= c_0^2\,c_0''^2 + c_{01}^2\,c_{01}''^2 + c_{03}^2\,c_{03}''^2 + c_{24}'^4\\
&= c_2^2\,c_2''^2 + c_{12}^2\,c_{12}''^2 + c_{23}^2\,c_{23}''^2 + c_{04}'^4\\
&= c_4^2\,c_4''^2 + c_{14}\,c_{14}''^2 + c_{34}\,c_{34}''^2 + c_{02}'^4\\
&= c_{13}'^4 \quad + c_3'^4 \quad + c_1'^4 \quad + c_5\;c_5''^2
\end{aligned}$$

gesetzt ist, d. h. die q-Funktionen drücken sich linear und homogen durch die vier Funktionen $q_5\wp_5$, $q_1\wp_1$, $q_3\wp_3$, $q_{13}\wp_{13}$ aus. In bekannter Weise fließen hieraus die Darstellungen der q-Funktionen durch die vier Koeffizienten einer beliebigen Horizontal- oder Vertikalreihe des Systems $\{q_{\alpha\beta}(x)\,\wp_{\alpha\beta}(x)\}$.

Alle diese Entwicklungen lassen erkennen, daß für die $q\wp$-Funktionen dieselbe Art der Abhängigkeit bestehen muß, wie sie bei den Thetaquadraten wohlbekannt ist, nämlich daß jede durch vier linearunabhängige von ihnen linear ausdrückbar sein muß. Man kann aber noch einen weiteren Schluß unmittelbar ziehen. Zu dem Zwecke erinnere ich an die Unterscheidung der Thetacharakteristiken in *Rosenhain*sche und *Göpel*sche Systeme*). Lege ich die mit allgemeinen Indizes hingeschriebene Anordnung der Thetacharakteristiken

$$\begin{array}{cccc}
\alpha & \alpha\delta & \alpha\varepsilon & \beta\gamma\\
\beta & \beta\delta & \beta\varepsilon & \alpha\gamma\\
\gamma & \gamma\delta & \gamma\varepsilon & \alpha\beta\\
\delta\varepsilon & \varepsilon & \delta & 5
\end{array}
\qquad
\left(\begin{smallmatrix}\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon = 0,1,2,3,4\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta\neq\varepsilon\end{smallmatrix}\right)$$

zugrunde — wo von den Vorzeichen der Thetas abgesehen ist, da es für den vorliegenden Zweck nur auf das Bildungsgesetz der Charakteristiken

*) Vgl. *Frobenius*, dieses Journal Bd. 89, S. 193.

ankommt — dann kann ich mit *Caspary**) sagen: Je vier Thetacharakteristiken, die einer Horizontal- oder Vertikalreihe der Anordnung angehören, bilden ein *Rosenhain*sches, je vier, die einer Unterdeterminante zweiter Ordnung in jener Anordnung angehören, bilden ein *Göpel*sches System. Und dementsprechend lassen sich die Relationen in *Rosenhain*sche und *Göpel*sche Relationen einteilen, je nachdem *Rosenhain*sche oder *Göpel*sche Thetacharakteristiken mit einander in Beziehung gesetzt werden.

Hiernach kann ich weiter schließen: *Die Rosenhainschen und Göpelschen Relationen unter den $q\wp$-Funktionen haben genau die gleiche explizite Gestalt wie die entsprechenden Relationen unter den Thetaquadraten oder q-Funktionen.* Dies leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß die Relationen zwischen den Thetaquadraten eine Folge davon sind, daß die sechzehn Thetaquadrate die Koeffizienten des Orthogonalsystems $\{\alpha\beta\}$ bilden, wo

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \theta_5\,(0), & \beta_1 &= \theta_5\,(2x), \\ \alpha_2 &= \theta_{01}(0), & \beta_2 &= \theta_{01}(2x), \\ \alpha_3 &= \theta_4\,(0), & \beta_3 &= \theta_4\,(2x), \\ \alpha_4 &= \theta_{23}(0), & \beta_4 &= \theta_{23}(2x), \end{aligned}$$

und wenn man hinzunimmt, daß die sechzehn $q\wp$-Funktionen in gleicher Weise aus dem Sechzehnersystem $\{\alpha^{(2)}\beta\}$, hervorgehen, wo

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(2)} &= -\theta_5^{(2)}(0), & \beta_1 &= \theta_5\,(2x), \\ \alpha_2^{(2)} &= -\theta_{01}^{(2)}(0), & \beta_2 &= \theta_{01}(2x), \\ \alpha_3^{(2)} &= -\theta_4^{(2)}(0), & \beta_3 &= \theta_4\,(2x), \\ \alpha_4^{(2)} &= -\theta_{23}^{(2)}(0), & \beta_4 &= \theta_{23}(2x), \end{aligned}$$

so daß die *Euler-Cayley*sche Darstellung, in Verbindung mit den Formeln der quadratischen Transformation, auch die sechzehn $q\wp$-Funktionen linear ausgedrückt liefert durch die Thetas eines *Göpel*schen Vierersystems mit doppelten Moduln.

Nun sind die *Rosenhain*schen und *Göpel*schen Relationen unter den q-Funktionen von *Caspary* in eine elegante explizite Form gebracht worden durch Zuhilfenahme neuer Konstanten $\mathfrak{a}_{mn}$, welche die Bedingung der Orthogonalität erfüllen und welche nichts anderes sind als die Koeffizienten des Systems

---

*) Ann. de l' Éc. Norm. (3) Bd. 10, S. 279, 280.

$$\begin{matrix} \frac{c_0^2}{c_5^2} & \frac{c_{01}^2}{c_5^2} & \frac{c_{03}^2}{c_5^2} \\ \frac{c_2^2}{c_5^2} & \frac{c_{12}^2}{c_5^2} & \frac{c_{23}^2}{c_5^2} \\ \frac{c_4^2}{c_5^2} & \frac{c_{14}^2}{c_5^2} & \frac{c_{14}^2}{c_5^2} \end{matrix}.$$

Ich kann daher die entsprechenden Relationen für die $q\wp$-Funktionen unmittelbar hinschreiben, nur daß natürlich den konstanten Faktoren $\mathfrak{a}_{mn}$ eine veränderte Bedeutung zukommt. Um diese Bedeutung zu erkennen, wird es am einfachsten sein, eine der Relationen aufzustellen. Dazu betrachte ich die Formelsysteme (J_7) und (J_8) und führe z. B. aus (J_8) die Ausdrücke der $q_0(x)$, $q_2(x)$, $q_4(x)$, $q_{13}(x)$ in die zweite Gleichung von (J_7) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & C c_5^2 q_{02}(x)\wp_{02}(x) = \\ & -c_{24}'^2(-c_{04}'^2\wp_5(x) - c_{23}c_{23}''q_1(x)\wp_1(x) - c_{12}c_{12}''q_3(x)\wp_3(x) + c_2c_2''q_{13}(x)\wp_{13}(x)) \\ & +c_{04}'^2(-c_{24}'^2\wp_5(x) + c_{03}c_{03}''q_1(x)\wp_1(x) - c_{01}c_{01}''q_3(x)\wp_3(x) - c_0c_0''q_{13}(x)\wp_{13}(x)) \\ & +c_{02}'^2(-c_5c_5''\wp_5(x) - c_1'^2q_1(x)\wp_1(x) + c_3'^2q_3(x)\wp_3(x) + c_{13}'^2q_{13}(x)\wp_{13}(x)) \\ & -c_5c_5''(-c_{02}'^2\wp_5(x) - c_{34}c_{34}''q_1(x)\wp_1(x) + c_{14}c_{14}''q_3(x)\wp_3(x) - c_4c_4''q_{13}(x)\wp_{13}(x)) \\ = \quad & (-c_{24}'^2c_2\,c_2'' - c_{04}'^2c_0\,c_0'' + c_{02}'^2c_{13}'^2 + c_5c_5''c_4\,c_4'')q_{13}(x)\wp_{13}(x) \\ & +(+c_4'^2c_{12}c_{12}'' - c_{04}'^2c_{01}c_{01}'' + c_{02}'^2c_3'^2 - c_5c_5''c_{14}c_{14}'')q_3(x)\wp_3(x) \\ & +(+c_{24}'^2c_{23}c_{23}'' + c_{04}'^2c_{03}c_{03}'' + c_{02}'^2c_1'^2 + c_5c_5''c_{34}c_{34}'')q_1(x)\wp_1(x), \end{aligned}$$

da der Faktor von $\wp_5$ identisch verschwindet. Die vorstehenden Faktoren setzen sich aus den Unterdeterminanten des Systems

$$\begin{matrix} c_0c_0'' & c_{01}c_{01}'' & -c_{03}c_{03}'' & -c_{24}'^2 \\ -c_2c_2'' & c_{12}c_{12}'' & c_{23}c_{23}'' & -c_{04}'^2 \\ c_4c_4'' & -c_{14}c_{14}'' & c_{34}c_{34}'' & -c_{02}'^2 \\ c_{13}'^2 & c_3'^2 & c_1'^2 & c_5c_5'' \end{matrix}$$

zusammen, so daß, wenn für den Augenblick die Koeffizienten des hingeschriebenen Systems mit g_{ik} bezeichnet werden, die Faktoren der $q_{13}\wp_{13}$, $q_3\wp_3$, $q_1\wp_1$ die Werte annehmen

$$g_{12}^{14} + g_{34}^{14}, \qquad g_{12}^{24} + g_{34}^{24}, \qquad g_{12}^{34} + g_{34}^{34},$$

wobei $g_{ik}^{rs} = g_{ri}\,g_{sk} - g_{rk}\,g_{si}$ gesetzt ist. Solcher Unterdeterminantensummen

sind *neun* möglich, und sie bilden, wie aus (1.) hervorgeht, die Koeffizienten eines orthogonalen Neunersystems. Bezeichne ich diese mit $\mathfrak{a}_{mn}$ $m, n = (1, 2, 3)$, dann nimmt die in Rede stehende Relation die Gestalt an

$$q_{02}(x)\,\wp_{02}(x) = \mathfrak{a}_{13}\,q_{13}(x)\,\wp_{13}(x(+ \mathfrak{a}_{23}\,q_3(x)\,\wp_3(x) + \mathfrak{a}_{33}\,q_1(x)\,\wp_1(x).$$

Sie gehört zu der Klasse der *Rosenhain*schen Relationen. Hiernach lassen sich die *Rosenhain*schen Relationen unter den $q\wp$-Funktionen wie folgt hinschreiben, wenn ich die Argumente der Kürze halber unterdrücke:*)

$$\begin{aligned}
q_{1h}\wp_{1h} = {} & \mathfrak{a}_{3l}\,q_{2k}\wp_{2k} - \mathfrak{a}_{2l}\,q_{3k}\wp_{3k} - \mathfrak{a}_{1l}\,q_{4k}\wp_{4k} = \mathfrak{a}_{3l}\,q_{2k}\wp_{2k} - \mathfrak{a}_{3k}\,q_{2l}\wp_{2l} - \mathfrak{a}_{3h}\,q_{24}\wp_{24} \\
= {} & -\mathfrak{a}_{3k}\,q_{2l}\wp_{2l} + \mathfrak{a}_{2k}\,q_{3l}\wp_{3l} + \mathfrak{a}_{1k}\,q_{4l}\wp_{4l} = -\mathfrak{a}_{2l}\,q_{3k}\wp_{3k} + \mathfrak{a}_{2k}\,q_{3l}\wp_{3l} + \mathfrak{a}_{2h}\,q_{34}\wp_{34} \\
= {} & -\mathfrak{a}_{3h}\,q_{24}\wp_{24} + \mathfrak{a}_{2h}\,q_{34}\wp_{34} + \mathfrak{a}_{1h}\,q_{44}\wp_{44} = -\mathfrak{a}_{1l}\,q_{4k}\wp_{4k} + \mathfrak{a}_{1k}\,q_{4l}\wp_{4l} + \mathfrak{a}_{1h}\,q_{44}\wp_{44},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{4h}\wp_{4h} = {} & \mathfrak{a}_{1l}\,q_{1k}\wp_{1k} + \mathfrak{a}_{2l}\,q_{2k}\wp_{2k} + \mathfrak{a}_{3l}\,q_{3k}\wp_{3k} = \mathfrak{a}_{1l}\,q_{1k}\wp_{1k} - \mathfrak{a}_{1k}\,q_{1l}\wp_{1l} - \mathfrak{a}_{1h}\,q_{14}\wp_{14} \\
= {} & -\mathfrak{a}_{1k}\,q_{1l}\wp_{1l} - \mathfrak{a}_{2k}\,q_{2l}\wp_{2l} - \mathfrak{a}_{3k}\,q_{3l}\wp_{3l} = \mathfrak{a}_{2l}\,q_{2k}\wp_{2k} - \mathfrak{a}_{2k}\,q_{2l}\wp_{2l} - \mathfrak{a}_{2h}\,q_{24}\wp_{24} \\
= {} & -\mathfrak{a}_{1h}\,q_{14}\wp_{14} - \mathfrak{a}_{2h}\,q_{24}\wp_{24} - \mathfrak{a}_{3h}\,q_{34}\wp_{34} = \mathfrak{a}_{3l}\,q_{3k}\wp_{3k} - \mathfrak{a}_{3k}\,q_{3l}\wp_{3l} - \mathfrak{a}_{3h}\,q_{34}\wp_{34}, \\
q_{44}\wp_{44} = {} & \mathfrak{a}_{1h}\,q_{1h}\wp_{1h} + \mathfrak{a}_{2h}\,q_{2h}\wp_{2h} + \mathfrak{a}_{3h}\,q_{3h}\wp_{3h} = \mathfrak{a}_{h1}\,q_{h1}\wp_{h1} + \mathfrak{a}_{h2}\,q_{h2}\wp_{h2} + \mathfrak{a}_{h3}\,q_{h3}\wp_{h3},
\end{aligned}$$

$$(h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2),$$

wenn noch beachtet wird, daß die Relationen bei Vertauschung der Indizes in den $q_{ij}\,\wp_{ij}$ und $\mathfrak{a}_{ij}$ ungeändert bleiben, d. h. betrachte ich die $q\wp$-Funktionen, welche zu zwei *Rosenhain*schen Systemen von Thetacharakteristiken gehören, so läßt sich jede des einen Systems durch diejenigen drei $q\wp$-Funktionen des anderen Systems linear ausdrücken, welche mit ihr nicht in der gleichen Horizontalen und Vertikalen stehen.

Sie fließen also, wie man sieht, aus den *Rosenhain*schen Relationen zwischen den Thetaquadraten durch bloße Vertauschung der Thetaquadrate mit den $q\wp$. Und dasselbe gilt für die *Göpel*schen Relationen, wonach sich vermittelst vier $q\wp$-Funktionen, welche in der *Caspary*schen Anordnung irgend einen Minor zweiten Grades bilden, die übrigen zwölf $q\wp$-Funktionen linear und homogen darstellen lassen. Ich verzichte darauf, auch sie explizite hier hinzuschreiben und begnüge mich, auf diejenige Form hinzuweisen, in welche *Caspary***) die *Göpel*schen Relationen zwischen den Thetaquadraten gebracht hat.

---

*) Vgl. *F. Caspary*, Ann. de l' Éc. Norm. (3) Bd. 10, S. 274.

**) a. a. O. S. 277, 278.

6. *Neue Relationen unter den $q\wp$-Funktionen.* — Bis hierher bieten die linearen Relationen unter den $q\wp$-Funktionen eine bemerkenswerte Analogie zu denjenigen, welche unter den q-Funktionen statthaben. Die Abhängigkeit unter den $q\wp$-Funktionen ist aber eine speziellere, wie jetzt gezeigt werden soll. Es treten lineare Abhängigkeiten hinzu, wie sie bei den Thetaquadraten nicht existieren.

Eine dieser Relationen läßt sich unmittelbar aus dem Formelsystem (J_8) ablesen, wo sie an letzter Stelle steht:

$$c_5 c_5'' \wp_5(x) - c_1'^2 q_1(x) \wp_1(x) - c_3'^2 q_3(x) \wp_3(x) - c_{13}'^2 q_{13}(x) \wp_{13}(x) = C.$$

Um die übrigen Relationen zu finden, könnte ich die zu (J_8) analogen Systeme aufstellen und mit den bekannten linearen Relationen unter den q-Funktionen

$$\begin{aligned} &c_0^2 q_0 + c_2^2 q_2 + c_4^2 q_4 = c_5^2, && c_0^2 q_0 + c_{01}^2 q_{01} + c_{03}^2 q_{03} = c_5^2, \\ &c_{01}^2 q_{01} + c_{12}^2 q_{12} + c_{14}^2 q_{14} = c_5^2, && c_2^2 q_2 + c_{12}^2 q_{12} + c_{23}^2 q_{23} = c_5^2, \\ &c_{03}^2 q_{03} + c_{23}^2 q_{23} + c_{34}^2 q_{34} = c_5^2, && c_4^2 q_4 + c_{14}^2 q_{14} + c_{34}^2 q_{34} = c_5^2 \end{aligned}$$

kombinieren. Schneller komme ich auf anderem Wege zum Ziel.

Dazu benutze ich wieder das Multiplikationstheorem (XV.)

$$|\alpha\beta| \times |\gamma\beta| = |\alpha\gamma|' \Sigma\beta^2,$$

diesmal unter folgenden Festsetzungen über die Parameter: Ich ersetze die Parameter β_μ durch ihre zweiten Ableitungen $\beta_\mu^{(2)}$, nehme für die Quadrupel $\alpha_\mu, \beta_\mu, \gamma_\mu$ je dasselbe *Göpel*sche System von Thetas mit doppelten Moduln und lasse in den Quadrupeln α_μ und $\beta_\mu^{(2)}$ die Argumente verschwinden. Alsdann werden die Koeffizienten des Systems $|\gamma\beta^{(2)}|$ gleich $-\vartheta_{\alpha\beta}^2(x) \cdot \wp_{\alpha\beta}(x)$, diejenigen des Systems $|\beta^{(2)}\alpha|$ gleich den Nullwerten dieser Funktionen, also $-c_{\alpha\beta} c_{\alpha'\beta}'' + c_{\alpha\beta}'^2$, während das Elementarsystem $|\gamma\alpha|'$ in das System der Thetaquadrate, $|\vartheta_{\alpha\beta}^2(x)|$, übergeht.

Was den konstanten Faktor $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2$ angeht, wo die β_μ durch die Nullwerte der zweiten Ableitungen eines *Göpel*schen Thetasystems zu ersetzen sind, so benutze ich den bekannten Satz (vgl. S. 245), daß

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2) = (\alpha\beta)_{1i}^2 + (\alpha\beta)_{2i}^2 + (\alpha\beta)_{3i}^2 + (\alpha\beta)_{4i}^2.$$

Hier ist nun

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = c_5^2$$

und

$$(\alpha\beta)^2_{1i} + (\alpha\beta)^2_{2i} + (\alpha\beta)^2_{3i} + (\alpha\beta)^2_{4i} = C\, c_5^2,$$

woraus folgt

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 = C.$$

Führe ich noch statt der Thetaquadrate die q-Funktionen ein, so nimmt das in Rede stehende Multiplikationstheorem in diesem Falle die folgende Gestalt an, wo ich wieder die Argumente der q und $\wp$ weglasse:

$$\begin{vmatrix} c_0\,c_0'' & -c_2\,c_2'' & c_4\,c_4'' & -c_{13}'^2 \\ c_{01}\,c_{01}'' & c_{12}\,c_{12}'' & -c_{14}\,c_{14}'' & -c_3'^2 \\ -c_{03}\,c_{03}'' & c_{23}\,c_{23}'' & c_{34}\,c_{34}'' & -c_1'^2 \\ c_{24}'^2 & c_{04}'^2 & c_{02}'^2 & c_5\,c_5'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_0\,\wp_0 & -q_2\,\wp_2 & q_4\,\wp_4 & q_{13}\,\wp_{13} \\ q_{01}\,\wp_{01} & q_{12}\,\wp_{12} & -q_{14}\,\wp_{14} & q_3\,\wp_3 \\ -q_{03}\,\wp_{03} & q_{23}\,\wp_{23} & q_{34}\,\wp_{34} & q_1\,\wp_1 \\ q_{24}\,\wp_{24} & q_{04}\,\wp_{04} & q_{02}\,\wp_{02} & -\wp_5 \end{vmatrix}$$

$$= -C \times \begin{vmatrix} 1 & q_1 & -q_3 & q_{13} \\ -q_1 & 1 & q_{13} & q_3 \\ q_3 & -q_{13} & 1 & q_1 \\ q_{13} & q_3 & q_1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Und vertausche ich Horizontal- und Vertikalreihen, dann entsteht das zweite System:

$$\begin{vmatrix} c_0\,c_0'' & c_{01}\,c_{01}'' & -c_{03}\,c_{03}'' & c_{24}'^2 \\ -c_2\,c_2'' & c_{12}\,c_{12}'' & c_{23}\,c_{23}'' & c_{04}'^2 \\ c_4\,c_4'' & -c_{14}\,c_{14}'' & c_{34}\,c_{34}'' & c_{02}'^2 \\ -c_{13}'^2 & -c_3'^2 & -c_1'^2 & c_5\,c_5'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q_0\,\wp_0 & q_{01}\wp_{01} & -q_{03}\wp_{03} & -q_{24}\wp_{24} \\ -q_2\,\wp_2 & q_{12}\wp_{12} & q_{23}\wp_{23} & -q_{04}\wp_{04} \\ q_4\,\wp_4 & -q_{14}\wp_{14} & q_{34}\wp_{34} & -q_{02}\wp_{02} \\ -q_{13}\wp_{13} & -q_3\,\wp_3 & -q_1\,\wp_1 & -\wp_5 \end{vmatrix}$$

$$= -C \times \begin{vmatrix} 1 & q_{02} & -q_{04} & -q_{24} \\ -q_{02} & 1 & q_{24} & -q_{04} \\ q_{01} & -q_{24} & 1 & -q_{02} \\ -q_{24} & -q_{04} & -q_{02} & -1 \end{vmatrix}.$$

Aus den beiden Systemen lese ich die folgenden linearen, aber nicht mehr homogenen Relationen ab:

$$-c_0\,c_0''\,q_0(x)\wp_0(x) - c_2\,c_2''\,q_2(x)\wp_2(x) - c_4\,c_4''\,q_4(x)\wp_4(x) + c_{13}'^2\,q_{13}(x)\wp_{13}(x) = C,$$

$$-c_{01}\,c_{01}''\,q_{01}(x)\wp_{01}(x) - c_{12}\,c_{12}''\,q_{12}(x)\wp_{12}(x) - c_{14}\,c_{14}''\,q_{14}(x)\wp_{14}(x) + c'^2\,q_3(x)\wp_3(x) = C,$$

$$-c_{03}\,c_{03}''\,q_{03}(x)\wp_{03}(x) - c_{23}\,c_{23}''\,q_{23}(x)\wp_{23}(x) - c_{34}\,c_{34}''\,q_{34}(x)\wp_{34}(x) + c_1'^2\,q_1(x)\wp_1(x) = C,$$

$$c_{24}'^2\,q_{24}(x)\wp_{24}(x) + c_{04}'^2\,q_{04}(x)\wp_{04}(x) + c_{02}'^2\,q_{02}(x)\wp_{02}(x) - c_5\,c_5''\,\wp_5(x) = C,$$

$$-c_0 c_0'' q_0(x)\wp_0(x) - c_{01} c_{01}'' q_{01}(x)\wp_{01}(x) - c_{03} c_{03}'' q_{03}(x)\wp_{03}(x) + c_{24}'^2 q_{24}(x)\wp_{24}(x) = C,$$
$$-c_2 c_2'' q_2(x)\wp_2(x) - c_{12} c_{12}'' q_{12}(x)\wp_{12}(x) - c_{23} c_{23}'' q_{23}(x)\wp_{23}(x) + c_{04}'^2 q_{04}(x)\wp_{04}(x) = C,$$
$$-c_4 c_4'' q_4(x)\wp_4(x) - c_{14} c_{14}'' q_{14}(x)\wp_{14}(x) - c_{34} c_{34}'' q_{34}(x)\wp_{34}(x) + c_{02}'^2 q_{02}(x)\wp_{02}(x) = C,$$
$$c_{13}'^2 q_{13}(x)\wp_{13}(x) + c_3'^2 q_3(x)\wp_3(x) \quad + c_1'^2 q_1(x)\wp_1(x) \quad - c_5 c_5'' \wp_5(x) \quad = C,$$

und das sind *Relationen, die zwischen den vier $q\wp$-Funktionen einer Horizontal- und einer Vertikalreihe der Casparyschen Anordnung bestehen.*

7. *Das System der j-Funktionen.* — **Diesen Relationen läßt sich eine** *homogene* **Form geben, wenn ich an Stelle der $q\wp$-Funktionen die j-Funktionen einführe, die ich bereits früher (S. 266) definiert habe:**

$$j_{\alpha\beta}(x) = q_{\alpha\beta}(x)\cdot\wp_{\alpha\beta}(x) + \frac{c_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}'' - c_{\alpha\beta}'^2}{c_5^2}.$$

Es ergibt sich alsdann:

$$(J_0)\quad \begin{cases} c_0\, c_0''\, j_0(x) + c_2\, c_2''\, j_2(x) + c_4\, c_4''\, j_4(x) - c_{13}'^2\ \ j_{13}(x) = 0, \\ c_{01} c_{01}'' j_{01}(x) + c_{12} c_{12}'' j_{12}(x) + c_{14} c_{14}'' j_{14}(x) - c_3'^2\ \ j_3(x) = 0, \\ c_{03} c_{03}'' j_{03}(x) + c_{23} c_{23}'' j_{23}(x) + c_{34} c_{34}'' j_{34}(x) - c_1'^2\ \ j_1(x) = 0, \\ c_{24}'^2 j_{24}(x) + c_{04}'^2\ \ j_{04}(x) + c_{02}'^2\ \ j_{02}(x) - c_5 c_5''\, j_5(x) = 0, \\ c_0\, c_0''\, j_0(x) + c_{01} c_{01}'' j_{01}(x) + c_{03} c_{03}'' j_{03}(x) - c_{24}'^2\ \ j_{24}(x) = 0, \\ c_2\, c_2''\, j_2(x) + c_{12} c_{12}'' j_{12}(x) + c_{23} c_{23}'' j_{23}(x) - c_{04}'^2\ \ j_{04}(x) = 0, \\ c_4\, c_4''\, j_4(x) + c_{14} c_{14}'' j_{14}(x) + c_{34} c_{34}'' j_{34}(x) - c_{02}'^2\ \ j_{02}(x) = 0, \\ c_{13}'^2 j_{13}(x) + c_3'^2\ \ j_3(x) + c_1'^2\ \ j_1(x) - c_5 c_5''\, j_5(x) = 0. \end{cases}$$

Und weiter überzeugt man sich leicht, daß die *Rosenhain*schen und *Göpel*schen Relationen unter den $q\wp$-Funktionen nicht bloß ihre Form nicht ändern, sondern die konstanten Faktoren a_{mn} beibehalten, wenn die $q\wp$ durch die j-Funktionen ersetzt werden. Um dies einzusehen, wird es genügen, darauf hinzuweisen, daß diese beiden Funktionssysteme analoge Entstehung zeigen, indem auch die j-Funktionen aus einem orthogonalen Sechzehnersystem hervorgehen, dessen *Euler-Cayley*sche Parameter lauten

$$-\theta_5^{(2)}(0), \quad \frac{\theta_5(2x)}{\vartheta_5^2(x)} - \frac{\theta_5(0)}{c_5^2},$$
$$-\theta_{01}^{(2)}(0), \quad \frac{\theta_{01}(2x)}{\vartheta_5^2(x)} - \frac{\theta_{01}(0)}{c_5^2},$$
$$-\theta_{04}^{(2)}(0), \quad \frac{\theta_4(2x)}{\vartheta_5^2(x)} - \frac{\theta_4(0)}{c_5^2},$$
$$-\theta_{23}^{(2)}(0), \quad \frac{\theta_{23}(2x)}{\vartheta_5^2(x)} - \frac{\theta_{23}(0)}{c_5^2}.$$

Die weiteren Schlüsse mögen an eine bekannte geometrische Deutung der in Rede stehenden Relationen anknüpfen. Der Satz nämlich, daß jede j-Funktion durch vier linearunabhängige unter ihnen linear und homogen ausdrückbar ist, bringt auf den Gedanken,*) die sechzehn j-Funktionen als Punkte im Raum zu deuten. Der *Casparys*chen Anordnung der Thetacharakteristiken möge die Punktanordnung

$$\begin{array}{cccc} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{array}$$

entsprechen. Alsdann setzen sich die Relationen (J_9) in lineare Punktrelationen um, welche nach *Möbius* aussagen, daß *die Punktquadrupel jeder Horizontal- und jeder Vertikalreihe je in einer Ebene liegen.*

Nun verlangen aber die *Rosenhain*schen Relationen (S. 279), welche die Punktquadrupel zweier Horizontalen oder Vertikalen verknüpfen, daß sich jeder Punkt des einen Quadrupels durch diejenigen drei des anderen darstellen lasse, welche mit ihm nicht in gleicher Reihe stehen. *Demnach müssen alle sechzehn Punkte einer und derselben Ebene angehören*, und folglich muß sich jeder Punkt durch drei beliebige andere ausdrücken lassen, d. h. *auch die Göpelschen Relationen zwischen den j-Funktionen führen zu einer Darstellung jeder j-Funktion durch drei unter ihnen.*

Die Konfiguration der sechzehn Punkte, welche das geometrische Abbild des linearen Zusammenhanges unter den j-Funktionen darstellt, ist demnach nichts anderes als eine Ausartung der räumlichen Konfiguration, die dem System der sechzehn Thetaquadrate entspricht, d. h. nichts anderes als *eine Ausartung der Kummerschen Konfiguration in sechzehn Punkte einer Ebene.*

Indem ich mir vorbehalte, auf diese Konfiguration bei anderer Gelegenheit zurückzukommen, bemerke ich zum Schluß, daß diese Resultate auch für die n-ten Ableitungen der j-Funktionen ihre Geltung behalten, wovon man sich im Hinblick auf die Bemerkung in Nr. 5, S. 272 überzeugen kann.

*) Vgl. *H. Weber*, dieses Journal Bd. 84, S. 340.

Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel.

Von Herrn *Moritz Réthy* in Budapest*).

I. Herr *L. Fejér* hat in Bd. 131 dieses Journals bezüglich der Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel zwei Sätze aufgestellt und bewiesen. Der erste Satz lautet: Besitzt die Potentialfunktion im Gleichgewichtspunkte G ein isoliertes Maximum, so findet Stabilität für die Zukunft statt, während in bezug auf die Vergangenheit Labilität vorhanden sein kann**). Der zweite Satz lautet, wenn man mit $f(v)$ die Widerstandskraft des Mittels bezeichnet und v die Geschwindigkeit des Punktes bedeutet, wie folgt: Besitzt die Potentialfunktion im Gleichgewichtspunkte G ein isoliertes Minimum, welches durch die Glieder niedrigster Ordnung der *Taylor*schen Reihe zum Vorschein kommt, und bleibt $\frac{f(v)}{v}$ für kleine Werte von v unterhalb einer endlichen Grenze, so ist die Gleichgewichtslage eine labile***).

Eine Fortsetzung dieser Untersuchungen scheint mir in zwei Richtungen hin wünschenswert. Einmal nämlich läßt Herr *Fejér* im zweiten Satz die Frage offen, ob in dem Fall, wo $\frac{f(v)}{v}$ für kleine Werte von v sich einer unendlich großen Grenze nähert, die Gleichgewichtslage eine stabile oder labile ist? Zweitens macht Herr *Fejér*, wie üblich, die Hypothese, daß die Widerstandskraft mit der Geschwindigkeit den Winkel π ein-

*) Vorgetragen in der am 20. April 1907 gehaltenen Jahresversammlung der math. und phys. Gesellschaft in Budapest. Erschienen in Math. u. Phys. Lapok 1907.

**) S. 218.

***) S. 219.

schließt; es fragt sich, welche Folgen es hat, wenn man diese Beschränkung fallen läßt und nur verlangt, daß der Winkel $>\frac{\pi}{2}$ und höchstens $=\pi$ sei.

Es ist klar, daß der erste *Fejér*sche Satz auch so gültig bleibt. Zerlegt man nämlich die Widerstandskraft in zwei Komponenten in Richtung der Tangente und Normale der Bahn, so ist die Arbeit der letzteren Komponente immer gleich Null, die Arbeit der Tangentialkomponente hingegen negativ. Da der genannte Satz aus der Gleichung der lebendigen Kraft einzig und allein mit Rücksichtnahme darauf folgt, daß die Arbeit der Widerstandskraft negativ ist, so bleibt er bei der beschriebenen Verallgemeinerung unberührt. Es fragt sich daher nur, welche Modifikationen der zweite Satz etwa erfährt.

Ich befasse mich in dieser Note bloß mit der ersteren Frage, und gedenke die zweite in einer bald folgenden zu behandeln.

II. Die Widerstandskraft $f(v)$ sei der Geschwindigkeit des materiellen Punktes entgegengesetzt gerichtet und eine nie negative analytische Funktion der Geschwindigkeit v. Man bezeichne mit r, ϑ, ω die Polarkoordinaten des freien materiellen Punktes von der Masse 1. Das Potential der freien Kraft habe im Anfangspunkt $r=0$ ein isoliertes Minimum vom Werte 0, und es sei

$$U = U_{2n} + U_{2n+1} + \cdots, \tag{1.}$$

wo die Glieder zur Rechten in den *Kartesi*schen Koordinaten x, y, z des materiellen Punktes von den Ordnungen $2n, 2n+1, \ldots$ sind, daher U_{2n} definit positiv ist.

Für r'' besteht die Gleichung

$$r'' = \left(\frac{\partial U}{\partial r} + r\vartheta'^2 + r\sin^2\vartheta\,\omega'^2\right) - f(v)\frac{\bar{r}'}{v}, \tag{2.}$$

und es ist

$$r\frac{\partial U}{\partial r} = x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z} = 2n\,U_{2n} + (2n+1)\,U_{2n+1} + \cdots. \tag{3.}$$

Bezüglich $f(v)$ setze ich voraus, daß einer der folgenden Fälle stattfinde.

Erster Fall: Es habe $\frac{f(v)}{v}$ für Werte von v, die zwischen 0 und einem endlichen v_e gelegen sind, eine obere Grenze M*).

*) z. B. $f(v)=v$ oder $f(v)=v^2$.

Zweiter Fall: Es habe $\frac{f(v)}{v}$ für Werte von v, die von 0 an bis zu einem endlichen v_m monoton anwachsen, monoton abnehmende Werte*).

Man kann infolge (1.) und (2.) um $r=0$ eine Kugel mit dem Radius R beschreiben, sodaß U und $\frac{\partial U}{\partial r}$ innerhalb der Kugel nur im Mittelpunkt verschwinden und überall sonst >0 sind. Man kann ferner, wenn der materielle Punkt vom Punkt P_0 im Innern der Kugel mit der Geschwindigkeit v_0 ausgeht, die $<v_e$ bzw. v_m ist, zugleich erreichen, daß im ersten Fall $\frac{f(v)}{v}$ im Innern gewiß endlich ist, also kleiner als eine angebbare Größe M, und daß im zweiten Fall der Wert v_m im Innern nicht erreicht werden kann. Man hat eben nur R genügend klein zu wählen. Dies folgt aus der Gleichung der lebendigen Kraft und aus dem Umstande, daß der materielle Punkt in einem widerstrebenden Mittel bei gegebener Potentialdifferenz eine kleinere Geschwindigkeitszunahme erlangt, als in einem nicht widerstrebenden.

Ich wähle also R auf diese Weise und beschränke die folgende Untersuchung auf das Innere der Kugel R.

Der Anfangswert der Radialgeschwindigkeit sei r'_0, und ich wähle v_0 und r'_0 so, daß die Ungleichung stattfindet

$$(4.) \qquad 0 < f(v_0)\frac{r'_0}{v_0} < \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0.$$

Dann folgt aus (2.), daß r'' im Anfang und eine Zeit lang positiv bleibt, d. i. r' diese Zeit hindurch wächst, mithin, da der Anfangswert positiv angenommen wurde, auch r' positiv bleibt. Es ist möglich, daß im Innern der Kugel R der Wert r'' später negativ, dann wieder positiv wird, und so fort. Dann seien die minimalen, gewiß nicht negativen**), Werte von r' in den Endpunkten der wachsenden Zeiten

$$t_1, t_2, \ldots t_\nu$$

der Reihe nach

$$r'_1, r'_2, \ldots r'_\nu.$$

---

*) z. B. $f(v)=v^{\frac{1}{2}}$ oder $f(v)=-\frac{1}{\log \text{nat} v}$, falls $0 \leqq v \leqq e^{-1}$.

**) Siehe folgende Seite, Zeile 8 bis 4 v. u.

Da zu diesen Zeitpunkten $\frac{dr'}{dt} = 0$ ist, so folgt aus (2.) die Ungleichung

$$(5.) \qquad \frac{f(v_i)}{v_i} r_i' \geqq \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i, \qquad (i=1,2,\ldots r)$$

die sich auch so schreiben läßt:

$$(5'.) \qquad \frac{f(v_i):v_i}{f(r'):r_i'} f(r_i') \geqq \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i.$$

Aus (5.) folgt, daß im ersten Fall

$$(6.) \qquad r_i \geqq \frac{1}{M}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i$$

ist, während im zweiten Fall ein Blick auf die Ungleichung (5'.) zeigt, daß dann (infolge $v_i \geqq r'$)

$$(6'.) \qquad f(r_i') \geqq \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i$$

stattfindet.

Im ersten Falle ist selbstverständlich

$$(6''.) \qquad \lim_{v=0} f(v) = 0;$$

ich nehme dasselbe auch für den zweiten Fall an.

Dann folgt aus (6.) und (6'.), daß r_i' gewiß nicht nur > 0 ist, sondern 0 gar nicht zur Grenze hat.

Da nämlich $r_0 > 0$ und auch $r_0'' > 0$ ist, so wächst r' von r_0' an gewiß, solange r'' nicht gleich Null wird. Da bis zu dieser Zeit r wächst, so bleibt $\frac{\partial U}{\partial r} > 0$. Wird später r'' Null und nachher negativ, so bleibt r', wie schon auf der vorigen Seite bemerkt wurde, doch positiv; dies folgt aus (2.), da andernfalls r'' gar nicht negativ werden könnte.

Da demnach r fortwährend wächst, so ist an der Stelle des ersten Minimums von r' der Radiusvektor $r_1 > r_0$, daher

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_1 > 0;$$

es folgt also sowohl aus (6.), als auch aus (6′.) und (6″.), daß $r_1' > 0$ ist und auch nicht 0 zur Grenze hat.

Da aber nachher r'' wieder > 0 wird usw., so kann ich die Schlüsse fortsetzen, und finde, daß

$$r_\nu > r_{\nu-1} > \cdots > r_1 > r_0$$

sein muß, und daß die untere Grenze von r' gewiß eine positive Größe ist. Und ich kann die Schlüsse auch nach Verlauf der Zeit $t = t_\nu$ fortsetzen und so aussprechen, daß r' immer positiv bleibt, demnach der materielle Punkt die Kugelfläche R gewiß mit endlicher Radialgeschwindigkeit in endlicher Zeit erreicht. Daher ist die Lage G eine labile Gleichgewichtslage, und es kann die folgende Verallgemeinerung des zweiten *Fejér*schen Satzes ausgesprochen werden:

Hat das Potential U der freien Kraft im Punkte G ein isoliertes Minimum, das durch die Glieder niedrigster Ordnung der Taylorschen Reihe von U zum Vorschein kommt, und ist die Widerstandskraft $f(v)$ des Mittels der Geschwindigkeit v des bewegten Punktes entgegengesetzt gerichtet, und bleibt $\frac{f(v)}{v}$ für kleine Werte von v entweder unterhalb einer endlichen Größe, oder wächst es monoton ins Unendliche, wenn v von einem kleinen Wert an fortwährend abnimmt, während $f(0) = 0$, sonst $f(v)$ positiv ist, so ist in G der frei bewegliche materielle Punkt in labilem Gleichgewicht.

Setzen wir speziell von der nie negativen Widerstandsfunktion $f(v)$ von vornherein voraus, daß sie sich monoton verändert, wenn v von 0 an bis zu einer endlichen, wenn auch kleinen, Größe heranwächst, und hat U in G die eben beschriebene Minimumseigenschaft, so ist zum labilen Gleichgewicht in G das Verschwinden von $f(v)$, wie man leicht findet, eine nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung.

Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x=a,\ y=b$.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Marburg (Bz. Kassel).

Einleitung.

Es sei durch $f(z, x, y) = 0$ ein algebraischer Körper K zweier unabhängigen Veränderlichen definiert. Dann kann man die Funktionen des Körpers entweder in der Umgebung irgend einer irreduktiblen Kurve $A(x, y) = 0$ betrachten oder in der Umgebung einer Stelle $x=a,\ y=b$. Die erste Aufgabe ist von Herrn *Hensel* behandelt in einem Aufsatze: Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen (Act. math. 23, 1900). Er beweist dort folgendes: Ist y_0 eine Wurzel von $A(x, y) = 0$, so kann man jede Funktion R aus K nach Potenzen von $y-y_0$ entwickeln mit Koeffizienten, die algebraische Funktionen von x sind, und zwar erhält man eine endliche Anzahl solcher Entwicklungen. Dabei schreitet die Entwicklung im allgemeinen nach ganzen Potenzen von $y-y_0$ fort und nur für eine endliche Anzahl von Kurven, die sogenannten Verzweigungskurven, nach gebrochenen Potenzen von $y-y_0$.

Ist $x=a$ ein Wert von x und wird für ihn $y_0=b$ und betrachten wir eine der Entwicklungen der Funktion R in der Umgebung der Stelle a, b, so konvergiert die Entwicklung im allgemeinen in einem Gebiete $|x-a|<r$, $|y-b|<s$. Geht aber durch die Stelle a, b die Projektion einer oder mehrerer Verzweigungskurven oder Unendlichkeitskurven der betrachteten Funktion, so können die Koeffizienten der Entwicklung $x-a$ im Nenner enthalten. Dann aber läßt sich für jede der Entwicklungen eine positive Zahl ε so bestimmen, daß man die Entwicklung als Reihe nach ganzen

oder gebrochenen Potenzen von $\frac{y-y_0}{(x-a)^\varepsilon}$ darstellen kann mit Koeffizienten, die gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ oder einer gebrochenen Potenz von $x-a$ sind. Die Reihe konvergiert dann in einem Gebiete

$$|x-a|<r,\ \left|\frac{y-y_0}{(x-a)^\varepsilon}\right|<s.$$

Der Konvergenzradius der Reihe wird dann, wenn wir sie als Reihe nach Potenzen von $y-y$ auffassen, gleichzeitig mit $|x-a|$ unendlich klein. Wir bekommen also durch die Entwicklungen nicht die ganze Umgebung der Stelle a, b. Es ist daher für die Stellen, wo sich zwei oder mehrere Verzweigungskurven schneiden, die *Hensel*sche Darstellung zu ergänzen.

Die Aufgabe, die hier behandelt werden soll, ist also, die Funktionen von K in der Umgebung einer Stelle $x=a,\ y=b$ darzustellen. Wir können und wollen die Stelle $a=0,\ b=0$ nehmen. Diese Aufgabe ist schon öfters behandelt, zuletzt eingehend von Herrn *Black* in der Arbeit: The parametric representation of the neighborhood of a singular point of an analytic surface. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. 37, Nr. 11, Boston. Aber die Darstellung von Herrn *Black* ist nicht einfach und läßt vor allem nicht hervortreten, wie die notwendigen Transformationen von der Art der singulären Stellen abhängen. Nun kann man mit Benutzung der *Hensel*schen Resultate die Aufgabe einfacher und klarer lösen und dabei eine deutlichere Einsicht in die Art der singulären Stellen gewinnen. Die Vereinfachung des Beweises besteht vor allem darin, daß es mir gelingt, mit Transformationen zwischen den unabhängigen Veränderlichen auszukommen.

Das Resultat ist folgendes: *Man kann Funktionenpaare u, v des Körpers K bestimmen derart, daß x und y gewöhnliche Potenzreihen von u, v werden, die für $u=v=0$ verschwinden, während alle anderen Funktionen von K entweder gewöhnliche Potenzreihen von u, v werden, oder Quotienten solcher. Eine endliche Anzahl solcher Funktionenpaare und Entwicklungen genügt, die Funktionen von K für die ganze Umgebung von $x=0,\ y=0$ darzustellen.*

*Neu an dem Resultat ist, soviel ich weiß, daß man die Hilfsgrößen u, v als Funktionen des Körpers K wählen kann.**)

*) Man kann übrigens die Darstellung von Herrn *Black* leicht so umformen, daß auch aus ihr folgt, daß u, v als Funktionen des Körpers gewählt werden können. Ich gedenke an anderer Stelle darauf zurückzukommen.

Betrachten wir eine dieser Darstellungen. Alle Funktionen aus K sind also entweder gewöhnliche Potenzreihen zweier passend gewählten Größen u, v des Körpers oder Quotienten solcher. Setzen wir nun $u=v=0$, so nehmen die Funktionen von K zum Teil bestimmte Werte an, zum Teil werden sie ganz unbestimmt $\left(\frac{0}{0}\right)$. Wir nennen die Gesamtheit der so sich ergebenden Werte, (wenn wir $\frac{0}{0}$ der Kürze halber auch mit Wert bezeichnen dürfen), eine Stelle des Körpers K, und ferner die Werte, die wir für kleine Werte von u, v bekommen, die Umgebung dieser Stelle oder auch ein Element des Körpers oder algebraischen Gebildes. Eine Stelle ist natürlich nicht immer bestimmt durch Angabe der Werte, die zwei oder auch mehr Funktionen an ihr annehmen, wohl aber durch Angabe der Entwicklungen von drei passend gewählten Größen nach den Hilfsgrößen u, v.

I. *Die Funktionen von K in der Umgebung von x=0, y=0.*

§ 1.

Wir können annehmen, daß z eine ganze Funktion für die Umgebung von $x=0$, $y=0$ ist. Es sei Q die Diskriminante von $f(z, x, y)$ in bezug auf z und es sei

$$Q=x^{\delta}(y-t_1)(y-t_2)\dots(y-t_m)E,$$

wo E eine Einheit für $x=0$, $y=0$ ist und wo die t_i Potenzreihen von x sind, die für $x=0$ verschwinden. Die Projektionen der Verzweigungskurven, die durch die Stelle $x=0$, $y=0$ hindurchgehen, sind dann unter den Kurven $y=t_i$ enthalten, wozu noch $x=0$ kommen kann.

Wir beschränken x auf das Gebiet $|x|<r$ und y auf das Gebiet $|y|<s$, wobei wir uns vorbehalten, r und s noch passend zu wählen. Geben wir x einen konstanten Wert, so wird z eine algebraische Funktion von y allein, und diese Funktion hat, wenn wir r und s hinreichend klein wählen, im Gebiete $|y|<s$ als Verzweigungspunkte nur Stellen, die unter den Stellen $y=t_i$ enthalten sind, und bei genügend kleiner Wahl von r können wir auch erreichen, daß diese Stellen für alle Werte von x, für die $|x|<r$, alle im Gebiete $|y|<s$ bleiben. Für einen bestimmten Wert von x innerhalb $|x|<r$ können wir z als algebraische Funktion von y auf einer *Riemann*schen Fläche ausbreiten. Von dieser Fläche betrachten wir nur das Stück, für dessen Stellen $|y|<s$. Dies bezeichnen wir, da seine Gestalt von x abhängt, mit $\overline{R}(x)$. Die Fläche $\overline{R}$ kann in mehrere nicht zusammenhängende

Stücke $R, R^{(1)}, \ldots$ zerfallen. Die Gesamtheit dieser einzelnen Stücke ist durch x eindeutig bestimmt. Beschreibt x im Gebiete $|x| < r$ eine geschlossene Kurve γ, so geht daher die Gesamtheit der Flächen $R, R^{(1)}, \ldots$ wieder in sich selbst über. Geht dabei z. B. R in eine andere Fläche über, so muß innerhalb γ ein Punkt α liegen derart, daß, wenn x auch nur den Punkt α in einem kleinen Kreise umläuft, dann schon R in eine andere Fläche übergeht. Dann aber muß $x-\alpha=0$ eine singuläre Kurve für z sein, also, da es andere Singularitäten nicht gibt, eine Verzweigungskurve. Wir nehmen nun r so klein an, daß innerhalb $|x|<r$ außer etwa $x=0$ keine solche Verzweigungskurve liegt. Dann kann höchstens R in eine andere Fläche übergehen, wenn die Kurve γ, die x durchläuft, den Nullpunkt umschließt. Ist nun $x=0$ eine Verzweigungskurve und umläuft x den Nullpunkt einmal, so wird unter den $R, R^{(1)} \ldots$ eine Permutation eintreten. Diese läßt sich in Zyklen ordnen; einer von diesen sei $R, R^{(1)}, \ldots R^{(c-1)}$, so daß also nach c-maligem Umlauf von x um den Nullpunkt die Fläche R wieder in sich selbst übergeht. Dabei braucht aber nicht etwa z wieder denselben Wert anzunehmen, da eine Stelle von R sehr wohl in ein anderes Blatt hineingeraten kann, auch wenn y bei der Bewegung von x konstant bleibt, da die Verzweigungsschnitte sich unter y fortbewegen können.

§ 2.

Die Fläche R sei b-blättrig. Dann gehören zu einem Werte x und einem Werte y b Werte z von dem auf der Fläche R ausgebreiteten Zweige z. Diese Werte seien $z_1, z_2, \ldots z_b$. Bilden wir

$$g=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_b),$$

so ist g eine ganze rationale Funktion von z und ihre Koeffizienten sind für die Umgebung von $y=0$ eindeutige Funktionen von y. Dagegen können die Koeffizienten nicht eindeutige Funktionen von x sein für die Umgebung von $x=0$, wenn $c>1$ ist. Denn wenn x den Nullpunkt einmal umkreist, müssen die $z_1, z_2, \ldots z_b$ in andere Funktionen übergehen, da die Fläche R in die von ihr verschiedene Fläche $R^{(1)}$ übergeht; erst nach c-maligem Umlauf von x um den Nullpunkt geht g wieder in sich selbst über. Es werden daher die Koeffizienten von g gewöhnliche Potenzreihen von $x^{\frac{1}{c}}$. Sind $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}, \ldots z_b^{(\varkappa)}$ die Werte, die aus $z_1, z_2, \ldots z_b$ hervorgehen*), wenn x den

*) In *welchen* der Werte $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}, \ldots z_b^{(\varkappa)}$ dabei z. B. z_1 übergeht, hängt von dem Werte ab, den y hat.

Nullpunkt $\varkappa$-mal umkreist, so ist

$$g^{(\varkappa)}=(z-z_1^{(\varkappa)})(z-z_2^{(\varkappa)})\dots(z-z_b^{(\varkappa)})$$

die Funktion, die aus g hervorgeht, wenn x denselben Weg durchläuft. Das Produkt

$$F=g\,g^{(1)}\,g^{(2)}\dots g^{(c-1)}$$

wird eine ganze rationale Funktion von z vom Grade bc und ihre Koeffizienten sind gewöhnliche Potenzreihen von x, y. Wir nennen nun eine ganze rationale Funktion von z, deren Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von x, y sind, zerlegbar für den Bereich von $x=0$, $y=0$, wenn sie sich in ganze rationale Funktionen von z zerlegen läßt, deren Koeffizienten wieder gewöhnliche Potenzreihen von x, y sind. Dann ist die Funktion F unzerlegbar. Denn angenommen, F zerfiele in zwei Faktoren G und H der eben angegebenen Art, und es sei z_1 eine Wurzel von G, dann würde z_1 bei beliebigen Umläufen von x und y in $|x|<r$, $|y|<s$ immer wieder in eine Wurzel von G übergehen, da sich ja dabei G nicht ändert. Andererseits aber kann dadurch z_1 in jede der bc Wurzeln von F übergeführt werden. Es muß daher G bis auf einen konstanten Faktor mit F identisch sein. Die bc Wurzeln von $F=0$ hängen in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ mit einander zusammen.

Sind durch die Flächen $R, R^{(1)}, \dots R^{(c-1)}$ noch nicht alle Flächen R erschöpft, so gilt für die anderen Analoges. Und wir bekommen das Resultat: Für den Bereich von $x=0$, $y=0$ zerfällt die Funktion $f(z)$, durch deren Nullsetzen der Körper K definiert wird, in irreduktible Faktoren,

$$f(z)=F F_1 \dots F_{\lambda-1}.$$

§ 3.

Es genügt, einen der Zweige von z, die durch die Gleichungen $F=0$, $F_1=0, \dots F_{\lambda-1}=0$ definiert werden, zu betrachten, etwa den durch die Gleichung $F=0$ definierten. Wir verstehen also im folgenden unter z immer den Zweig von z, der der Gleichung $F=0$ genügt und auf den Flächen $R(x), R^{(1)}(x), \dots R^{(c-1)}(x)$ ausgebreitet ist.

Die Verzweigungspunkte der b-blättrigen Fläche $R(x)$ seien $t_1(x), t_2(x), \dots t_l(x)$. Es gilt dann folgender Satz: Liegt an der Stelle t_i ein

Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha-1$, so ist α ein Teiler von b und es liegen $\frac{b}{\alpha}$ Verzweigungspunkte der Ordnung $\alpha-1$ an der Stelle t_i über einander. Die Fläche $R(x)$ ist also mit anderen Worten eine Fläche, wie sie zu einer *Galois*schen Gleichung gehört. Zum Beweise nehmen wir an, daß an der Stelle t_i Verzweigungspunkte der Ordnungen $\alpha-1$, $\beta-1$, ... über einander liegen. Dann zerfällt die im Anfang von § 2 definierte Funktion g, aufgefaßt als Funktion von z und y, für den Bereich von $y=t_i$ in Faktoren vom Grade α, β, ... in z mit Koeffizienten, die ganze Potenzreihen von $y-t_i$ sind, und diese Faktoren sind insofern irreduktibel, als sie sich nicht in Faktoren derselben Art zerlegen lassen. Aber die einzelnen Faktoren lassen sich innerhalb des Gebietes $|x|<r$, $|y|<s$, in dem auch t_i liegt, in einander überführen, da in diesem Gebiete die Wurzeln von g alle mit einander zusammenhängen. Das aber ist nur möglich, wenn die einzelnen irreduktiblen Faktoren denselben Grad haben. Also ist, wie behauptet wurde, $\alpha=\beta=\cdots$. Ebenso folgt, daß auch $x=0$ für den von uns betrachteten Zweig z nur Verzweigungskurve *einer* Ordnung sein kann, etwa der Ordnung $\alpha-1$. Da dann bei einem α-maligen Umlauf um den Nullpunkt $R(x)$ in sich selbst übergeht, so ist a ein Vielfaches der oben definierten Zahl c.

§ 4.

Es sei $P(x, y)$ diejenige ganze rationale Funktion niedrigsten Grades, die die Faktoren $y-t_1(x)$, $y-t_2(x)$, $\ldots y-t_l(x)$ enthält. Ist dann $y-t$ ein Faktor von P von der Art, daß t für $x=0$ verschwindet, so muß t eine der Funktionen t_i sein. Ist nämlich A die ganze *irreduktible* Funktion, die $y-t$ als Faktor enthält, so ist A ein Faktor von P, und wenn $y-t$ keine Verzweigungskurve wäre, so könnte A fortgelassen werden und es wäre P nicht von möglichst niedrigem Grade. Sind die Glieder niedrigster Dimension von P bei der Entwicklung nach Potenzen von x, y durch x teilbar, und ist ferner $x=0$ eine Verzweigungskurve, so setzen wir $D=xP$, in allen anderen Fällen $D=P$ und nennen die so definierte Funktion D *die zu* $R(x)$ *gehörende Verzweigungsfunktion.* Sind die Glieder niedrigster Dimension von D bei der Entwicklung nach Potenzen von x, y von der Dimension μ, so nennen wir μ den *Rang der Verzweigung von* R.

Wir werden in Abschnitt III. zeigen, daß wir die Fälle, wo $\mu>1$ auf die Fälle $\mu=0$ oder $\mu=1$ zurückführen können. Diese Fälle aber behandeln wir in Abschnitt II.

II. *Die einfachsten Fälle.*

§ 1.

1.) Es sei $\mu=0$. Es ist dann $D=P$ und es muß $P=1$ sein. Die Fläche R hat keinen Verzweigungspunkt. Die weitere Behandlung erfolgt unter 2.).

2.) Es sei $\mu=1$. Es ist dann sicher $D=P$ und P enthält bei der Entwicklung nach Potenzen von x, y Glieder erster Dimension, also das Glied mit y oder x (oder beide). Kommt das Glied mit y vor, so setzen wir $P=\overline{y}$ und nehmen als neue Veränderliche $x, \overline{y}$. Da y aus der Gleichung $P=\overline{y}$ sich als gewöhnliche Potenzreihe von $x, \overline{y}$ ergibt, so wird durch diese Transformation nichts Wesentliches geändert, und wir können daher von vornherein annehmen, es sei $P \doteq y$. Es hat dann die Fläche R nur den Verzweigungspunkt $y=0$. Dieser muß von der Ordnung $b-1$ sein, weil sonst die Blätter von R nicht zusammenhängen würden. Unser Zweig z hat dann die Verzweigungskurve $y=0$ und vielleicht noch die Verzweigungskurve $x=0$, sonst aber keine in der Umgebung von $x=0$, $y=0$.

Kommt das Glied mit y in P nicht vor, so kommt sicher das Glied mit x vor, es ist also das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension durch x teilbar, und daher ist $x=0$ keine Verzweigungskurve; denn sonst wäre $D=xP$ und also μ gegen unsere Annahme gleich zwei. Wir führen statt x durch die Gleichung $P=\overline{x}$ die neue Veränderliche $\overline{x}$ ein. Dadurch wird wieder nichts Wesentliches geändert. Vor allem bleiben die Zusammenhangsverhältnisse der einzelnen z-Zweige ungeändert, während sich die Fläche R allerdings ändern wird. Unser Zweig z hat dann nur die Verzweigungskurve $\overline{x}=0$ in der Umgebung von $x=0$, $y=0$. Wir schreiben für $\overline{x}$ wieder x.

Alle in diesem Abschnitt zu behandelnden Fälle können wir hiernach dahin zusammenfassen, daß der von uns betrachtete Zweig z in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ als Verzweigungskurven nur haben soll $x=0$ und $y=0$. Die erste sei von der Ordnung $a-1$, die zweite von der Ordnung $b-1$, wobei nicht ausgeschlossen sein soll, daß a und b den Wert 1 haben.

Es wird unser Zweig z eine eindeutige endliche, stetige Funktion von $x^{\frac{1}{a}}$, $y^{\frac{1}{b}}$, also in eine gewöhnliche Potenzreihe dieser Größen entwickelbar, die uns alle Werte unseres Zweiges z für die Umgebung von $x=0$, $y=0$ liefert. Diese Potenzreihe schreiben wir so:

$$(1.) \qquad z = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^{\frac{\alpha}{a}} y^{\frac{\beta}{b}},$$

wo die $a_{\alpha\beta}$ gewöhnliche Potenzreihen von x, y sein sollen, und wo ferner

$$(2.) \qquad 0 \leqq \alpha \leqq a-1, \quad 0 \leqq \beta \leqq b-1.$$

In (1.) können einige der Größen $a_{\alpha\beta}$ Null sein. Diese denken wir uns fortgelassen und verstehen also unter α, β nur solche Zahlenpaare, denen in (1.) wirklich vorkommende Glieder entsprechen. Die übrigbleibenden Zahlen α, β haben die Eigenschaft, daß der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen α teilerfremd zu a ist und der der Zahlen β zu b. Denn sonst wären die Kurven $x=0$, $y=0$ nicht Verzweigungskurven der Ordnungen $a-1$, $b-1$, sondern niedrigerer Ordnung.

Für ein gegebenes Wertepaar x, y kann z offenbar höchstens ab Werte annehmen, aber natürlich in besonderen Fällen auch weniger. Nimmt z genau ab verschiedene Werte für gegebenes x, y an, so setzen wir einfach

$$(3.) \qquad x=u^a, \quad y=v^b.$$

Dann wird z eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v.

Die hier benutzten Hilfsgrößen u, v gehören im allgemeinen nicht dem Körper K an. Aber man kann statt ihrer immer Funktionen des Körpers einführen. Es läßt sich nämlich zeigen, daß es unter denjenigen Funktionen des Körpers, die sich als gewöhnliche Potenzreihen von u, v darstellen lassen, immer solche gibt, deren Glieder niedrigster Dimension sich auf u oder v reduzieren. Eine Funktion der ersten Art sei u_1, eine der zweiten v_1. Da dann u, v gewöhnliche Potenzreihen von u_1, v_1 werden, so können wir statt u, v die Größen u_1, v_1 einführen. Daß sich die Größen u_1, v_1 in der angegebenen Weise bestimmen lassen, möchte ich bei einer anderen Gelegenheit beweisen.

§ 2.

Ist die Anzahl der verschiedenen Werte von z aus der Reihe (1.) des vorigen Paragraphen für gegebenes x, y kleiner als ab, so kann es unter Umständen brauchbar und praktisch sein, und zwar wegen der großen Ein-

fachheit, auch zu setzen

$$x=u^a, \quad y=v^b,$$

aber es können dann zu verschiedenen Wertepaaren u, v dieselben Stellen des Gebildes gehören, und es ist infolgedessen sicher nicht möglich, u und v in der Art wie eben durch Funktionen des Körpers zu ersetzen. Wir müssen daher anders verfahren. Dabei benutzen wir zunächst Größen, die nicht dem Körper K anzugehören brauchen. Damit wir diese aber einfach durch Größen des Körpers ersetzen können, wählen wir sie immer so, daß zu verschiedenen Werten der benutzten Hilfsgrößen verschiedene Stellen des Körpers gehören.

Es sei m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und d der größte gemeinschaftliche Teiler von a, b. Es sei ferner $a=a'd$, $b=b'd$, so daß also a', b' teilerfremd sind. Dann setzen wir zunächst

$$x=x_1^{a'}, \quad y=y_1^{b'}, \tag{4.}$$

so daß wir bekommen

$$z=\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \sqrt[d]{x_1^\alpha y_1^\beta}. \tag{5.}$$

Das dürfen wir; denn zu verschiedenen Wertepaaren x_1, y_1 gehören auch verschiedene Stellen x, y, z. Es gehöre nämlich etwa zu den Wertepaaren x_1, y_1 und $\overline{x}_1, \overline{y}_1$ dieselbe Stelle. Dann folgt aus (4.)

$$\overline{x}_1=\omega_1 x_1, \quad \overline{y}_1=\omega_2 y_1,$$

wo ω_1 eine a'-te und ω_2 eine b'-te Einheitswurzel ist. Sollen nun aber die beiden Stellen übereinstimmen, so müssen sie auch in allen zugehörigen Werten von z übereinstimmen. Daraus folgt, daß für alle in (5.) vorkommenden Zahlenpaare α, β

$$\omega_1^{\frac{\alpha}{d}} \; \omega_2^{\frac{\beta}{d}} = 1$$

sein muß. Erheben wir dies zur Potenz $b'd$, so folgt $\omega_1^{\alpha b'}=1$. Da aber der größte gemeinsame Teiler der α und ebenso b' zu a' teilerfremd sind, so geht das nur, wenn $\omega_1=1$ ist. Ebenso folgt, daß $\omega_2=1$ ist, so daß also $x_1=\overline{x}_1$, $y_1=\overline{y}_1$ wird.

Wir können jetzt die Reihe für z etwas einfacher schreiben, nämlich

$$z=\Sigma_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}\sqrt[d]{x_1^\alpha y_1^\beta}, \tag{6.}$$

wo die b gewöhnliche Potenzreihen von x_1, y_1 sind und wo die Exponenten α, β jetzt den Bedingungen

$$0\leqq\alpha\leqq d-1, \quad 0\leqq\beta\leqq d-1 \tag{7.}$$

genügen. Da die früheren Zahlen α die Eigenschaft hatten, daß ihr größter gemeinsamer Teiler zu a teilerfremd war, so haben die in (7.) vorkommenden Zahlen α die Eigenschaft, daß ihr größter gemeinsamer Teiler zu d teilerfremd ist. Ebendie Eigenschaft haben die β.

Es sei ε eine primitive d-te Einheitswurzel. Dann sind alle Werte, die z für gegebenes x_1, y_1 annehmen kann, in der Form enthalten

$$z_{\lambda\mu}=\Sigma_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}\varepsilon^{\lambda\alpha+\mu\beta}\sqrt[d]{x_1^\alpha y_1^\beta}. \qquad (\lambda,\mu=0,1,\ldots d-1) \tag{8.}$$

Von diesen d^2 Werten sind dann und nur dann zwei $z_{\lambda'\mu'}$ und $z_{\lambda''\mu''}$ einander gleich, wenn für alle in (6.) vorkommenden Zahlenpaare α, β

$$(\lambda'-\lambda'')\alpha+(\mu'-\mu'')\beta\equiv 0 \quad (d).$$

Es sind also unter den d^2 Größen (8.) so viele immer unter einander gleich, als es Zahlenpaare λ, μ gibt, deren beide Zahlen nicht negativ und kleiner als d sind, und für die

$$\lambda\alpha+\mu\beta\equiv 0 \quad (d). \tag{9.}$$

Es seien λ, μ; λ_1, μ_1; ... diese Paare. Der größte gemeinsame Teiler, den die Größen $\lambda, \lambda_1, \ldots$ mit d gemeinsam haben, sei δ' und es sei $d=\delta'\delta$. Dann ist der größte gemeinsame Teiler, den die Größen $\mu, \mu_1, \ldots$ mit d gemeinsam haben, auch δ'. Denn aus (9.) folgt, daß δ' in $\mu\beta$ aufgeht, also in μ, da der größte gemeinsame Teiler der β zu d teilerfremd ist. Daher ist die Kongruenz (9.) nur so zu lösen, daß λ und μ durch δ' teilbar sind. Wir setzen

$$x_1=\xi^{\delta'}, \quad y_1=\eta^{\delta'}. \tag{10.}$$

Das dürfen wir; denn zu verschiedenen Wertepaaren ξ, η gehören verschie-

dene Stellen des Gebildes. Gehört nämlich zu den Wertepaaren ξ, η und $\overline{\xi}, \overline{\eta}$ dieselbe Stelle x_1, y_1, z, so folgt zunächst aus (10.), daß $\overline{\xi}=\xi\omega^{\lambda}$, $\overline{\eta}=\eta\omega^{\mu}$ sein muß, wo ω eine δ'-te Einheitswurzel ist. Ferner müssen aber auch die verschiedenen Werte von z, die zu ξ, η und $\overline{\xi}, \overline{\eta}$ gehören, einander gleich sein. Daraus folgt, daß für alle in (6.) vorkommenden Zahlenpaare α, β die Kongruenz

$$\lambda\alpha+\mu\beta\equiv 0 \quad (d)$$

bestehen muß. Das aber ist, wie wir gesehen haben, nur so möglich, daß λ und μ beide durch δ' teilbar sind, so daß $\overline{\xi}=\xi$ und $\overline{\eta}=\eta$ wird.

§ 3.

Wir können jetzt die Reihe für z wieder etwas einfacher schreiben, nämlich in der Form

$$z=\Sigma_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\sqrt[\delta]{\xi^{\alpha}\eta^{\beta}}, \tag{11.}$$

wo die c gewöhnliche Potenzreihen von ξ, η sind und wo die Zahlen α, β jetzt den Bedingungen

$$0\leqq\alpha\leqq\delta-1, \quad 0\leqq\beta\leqq\delta-1$$

genügen. Dabei haben sowohl die in (11.) vorkommenden Zahlen α als auch die β die Eigenschaft, daß ihr größter gemeinsamer Teiler teilerfremd zu δ ist. Ferner gibt es nach dem vorigen zwei unter sich und zu δ teilerfremde ganze Zahlen $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$, so daß für alle in (11.) vorkommenden Zahlenpaare α, β die Kongruenz

$$\mathfrak{l}\alpha+\mathfrak{m}\beta\equiv 0 \quad (\delta) \tag{12.}$$

gilt. Die δ^2 Werte, die z für gegebenes ξ, η annehmen kann, ergeben sich hieraus zu je δ einander gleich, sodaß nur δ von einander verschieden sind, und es folgt also, daß z für gegebenes x, y statt ab nur $\frac{ab}{\delta}$ verschiedene Werte hat.

Wollen wir ξ, η, z als ganze Potenzreihen zweier Größen u, v darstellen, so ist es am einfachsten, wir setzen

$$\xi=u^{\lambda}v^{\lambda_1}, \quad \eta=u^{\mu}v^{\mu_1}, \tag{13.}$$

wo $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1$ ganze positive Zahlen sind, die so zu bestimmen sind, daß z eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v wird und daß zu verschiedenen Wertepaaren u, v verschiedene Stellen des Gebildes gehören. Dazu ist zunächst notwendig, daß die Kongruenzen bestehen

$$\lambda\alpha+\mu\beta\equiv 0 \ (\delta), \quad \lambda_1\alpha+\mu_1\beta\equiv 0 \ (\delta), \tag{14.}$$

und zwar für alle in (11.) vorkommenden Zahlenpaare α, β. Diese Bedingungen können wir in eine zusammenfassen. Da der größte gemeinsame Teiler der α zu δ teilerfremd ist, lassen sich ganze Zahlen $g_{\alpha\beta}$ so bestimmen, daß

$$\mathfrak{a}=\Sigma_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\alpha$$

zu δ teilerfremd ist. Setzen wir ferner

$$\mathfrak{b}=\Sigma_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\beta,$$

so folgt aus (12.)

$$\mathfrak{l}\mathfrak{a}+\mathfrak{m}\mathfrak{b}\equiv 0 \ (\delta) \tag{15.}$$

und daraus, daß auch $\mathfrak{b}$ zu δ teilerfremd ist. Wir können dann die Bedingung (14.) durch die Bedingung

$$\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}\equiv 0 \ (\delta) \tag{16.}$$

ersetzen. Denn aus (15.) und (16.) folgt, da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremd zu δ sind, daß die Determinante

$$\mathfrak{l}\mu-\mathfrak{m}\lambda\equiv 0 \ (\delta). \tag{17.}$$

Hieraus und aus (12.) ergibt sich

$$\mathfrak{m}(\lambda\alpha+\mu\beta)\equiv\mathfrak{l}\mu\alpha+\mathfrak{m}\mu\beta=\mu(\mathfrak{l}\alpha+\mathfrak{m}\beta)\equiv 0 \ (\delta),$$

also, da $\mathfrak{m}$ zu δ teilerfremd ist, die Bedingung (14.). Setzen wir daher

$$\zeta=\sqrt[\delta]{\xi^{\mathfrak{a}}\eta^{\mathfrak{b}}}, \tag{18.}$$

so wird durch (13.) z dann und nur dann eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v wenn durch (13.) ζ rational wird, wenn also $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1$ den Kongruenzen

(19.) $$\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}\equiv 0 \ (\delta), \quad \lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}\equiv 0 \ (\delta)$$

genügen.

Nun sollen aber auch zu verschiedenen Wertepaaren u, v verschiedene Stellen des Gebildes gehören. Da die in (11.) vorkommenden Wurzeln $\sqrt[\delta]{\xi^\alpha \eta^\beta}$ bis auf ganzzahlige Potenzen von ξ und η gleich Potenzen von ζ sind, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn zu verschiedenen Wertepaaren u, v verschiedene Wertetripel ξ, η, ζ gehören. Das ist sicher der Fall, wenn durch ξ, η, ζ die Größen u, v eindeutig bestimmt sind, wenn es also ganze Zahlen a, b, c; a_1, b_1, c_1 gibt, so daß

(20.) $$u=\xi^a\eta^b\zeta^c, \quad v=\xi^{a_1}\eta^{b_1}\zeta^{c_1}$$

wird. Um die Bedingungen dafür aufzustellen, schreiben wir die Kongruenzen (19.) als Gleichungen in der Form

(19'.) $$\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}=\nu\delta, \quad \lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}=\nu_1\delta.$$

Dann wird

(18'.) $$\zeta=u^\nu v^{\nu_1}.$$

Die Gleichungen (20.) sind nun identisch mit

(21.) $$\begin{aligned} a\lambda+b\mu+c\nu&=1, \quad a_1\lambda+b_1\mu+c_1\nu=0,\\ a\lambda_1+b\mu_1+c\nu_1&=0, \quad a_1\lambda_1+b_1\mu_1+c_1\nu_1=1.\end{aligned}$$

Sollen diese Gleichungen lösbar sein, so ist notwendig und hinreichend, daß die Unterdeterminanten der Matrix

(22.) $$\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu\\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\end{pmatrix}$$

keinen gemeinsamen Teiler haben. Es heiße die Unterdeterminante, die durch Fortlassen der i-ten Kolonne entsteht, Δ_i. Dann ist nach (19'.)

(23.) $$\Delta_3\mathfrak{a}=-\Delta_1\delta, \quad \Delta_3\mathfrak{b}=\Delta_2\delta.$$

Es muß also Δ_3 durch δ teilbar sein. Hätte aber Δ_3 noch einen anderen Faktor, so ginge dieser in Δ_1 und Δ_2 auf, wäre also gemeinsamer Teiler von $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Daher ist $\Delta_3=\pm\delta$. Dann aber haben $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ keinen

gemeinsamen Teiler; denn aus (23.) folgt jetzt $\mathfrak{a}=\mp\Delta_1$, $\mathfrak{b}=\pm\Delta_2$, und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind teilerfremd zu $\delta=\pm\Delta_3$. Wir nennen zwei Zahlenpaare λ, μ; λ_1, μ_1, die allen Anforderungen genügen, zu einander adjungiert, und zwar nennen wir, wenn $\Delta_3=\lambda\mu_1-\lambda_1\mu=+\delta$ ist, λ, μ das erste und λ_1, μ_1 das zweite Paar.

§ 4.

Nun liefert uns aber *eine* Entwicklung, wie wir sie für z mit Hilfe von (13.) erhalten, nicht alle Werte von z. Es genügt aber, wie wir jetzt zeigen wollen, eine endliche Anzahl derartiger Entwicklungen. Wir beweisen zunächst folgenden Satz. Es seien λ, μ zwei ganze Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen

(24.)
1.) $\lambda>0$, $\mu\geqq 0$,
2.) $\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}=\nu\delta$, wo ν eine ganze Zahl,
3.) λ, μ, ν teilerfremd.

Dann läßt sich zu λ, μ als erstem Paar ein adjungiertes λ_1, μ_1 als zweites so bestimmen, daß $0\leqq\lambda_1<\lambda$, $\mu_1>0$ ist. Um diesen Satz zu beweisen, haben wir nach dem vorigen die Zahlen λ_1, μ_1 so zu bestimmen, daß sie den Bedingungen genügen

(25.)
I.) $0\leqq\lambda_1<\lambda$, $\mu_1>0$,
II.) $\lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}\equiv 0 \quad (\delta)$,
III.) $\lambda\mu_1-\lambda_1\mu=\delta$.

Die Zahlen λ, μ können einen gemeinsamen Teiler δ_1 haben. Dieser muß aber ein Teiler von δ sein, da aus (24.) 2.) folgen würde, daß er sonst auch in ν aufgeht. Dieser Teiler ist nach (24.) 3.) teilerfremd zu ν. Es sei $\delta=\delta_1\delta_2$, $\lambda=\lambda'\delta_1$, $\mu=\mu'\delta_1$.

Es seien $\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$ zwei ganze Zahlen, die der Bedingung

$$\lambda'\mu^{(0)}-\mu'\lambda^{(0)}=\delta_2$$

genügen. Sie seien so gewählt, daß $\lambda^{(0)}$ nicht negativ und möglichst klein, also kleiner als λ', ist. Dann läßt sich jede Lösung von (25.) III.) in der Form schreiben

(26.) $$\lambda_1=\lambda^{(0)}+g\lambda', \quad \mu_1=\mu^{(0)}+g\mu',$$

wo g eine ganze Zahl ist. Hieraus folgt

$$\lambda_1 \mathfrak{a} + \mu_1 \mathfrak{b} = \lambda^{(0)} \mathfrak{a} + \mu^{(0)} \mathfrak{b} + g \delta_2 \nu. \tag{27.}$$

Es ergibt sich aber aus den Kongruenzen

$$\mu^{(0)} \lambda' - \lambda^{(0)} \mu' \equiv 0 \ (\delta_2), \quad \mathfrak{a} \lambda' + \mathfrak{b} \mu' \equiv 0 \ (\delta_2),$$

da λ', μ' zu δ_2 teilerfremd sind, daß die Determinante

$$\lambda^{(0)} \mathfrak{a} + \mu^{(0)} \mathfrak{b} \equiv 0 \ (\delta_2).$$

Daher ist nach (27.) $\lambda_1 \mathfrak{a} + \mu_1 \mathfrak{b}$ jedenfalls durch δ_2 teilbar. Da aber ν zu δ_1 teilerfremd ist, so läßt sich in (27.) g so bestimmen, daß $\lambda_1 \mathfrak{a} + \mu_1 \mathfrak{b}$ durch $\delta_1 \delta_2 = \delta$ teilbar wird. Dabei können wir noch annehmen, daß g kleiner als δ_2 und nicht negativ ist. Die sich so ergebenden Zahlen λ_1, μ_1 erfüllen dann sicher die Bedingungen (25.) I.) und III.), aber auch die Bedingung II.); denn zunächst ist $\lambda_1 \geqq 0$ da $\lambda^{(0)} \geqq 0$ und $g \geqq 0$, ferner ist aber $\lambda^{(0)} < \lambda'$, $g < \delta_1$, also $\lambda_1 = \lambda^{(0)} + g\lambda' < \lambda = \delta_1 \lambda'$ und schließlich folgt aus III.), daß $\mu_1 = \frac{\delta + \lambda_1 \mu}{\lambda} > 0$. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Wir gehen nun von dem Zahlenpaare

$$\lambda_0 = \delta, \quad \mu_0 = 0$$

aus, das die Bedingungen (24.) erfüllt, und bestimmen dazu ein zweites adjungiertes Paar λ_1, μ_1, so daß $\lambda_1 < \lambda$. Ist $\lambda_1 \neq 0$, so können wir, da dann auch λ_1, μ_1 den Bedingungen (24.) genügen, zu λ_1, μ_1 ein zweites adjungiertes Paar λ_2, μ_2 bestimmen, und zwar so, daß $\lambda_2 < \lambda_1$. Ist auch $\lambda_2 \neq 0$, so können wir fortfahren. Wir erhalten auf diese Weise eine Reihe von Zahlenpaaren λ_i, μ_i, von denen immer zwei auf einander folgende zu einander adjungiert sind, und zwar ist immer von zwei adjungierten Zahlenpaaren das frühere das erste und das spätere das zweite Paar. Diese Reihe muß abbrechen, da die positiven Zahlen λ_i immer kleiner werden, so daß schließlich ein λ_i auftritt, das Null ist. Dies sei λ_n. Setzen wir

$$\xi = u_i^{\lambda_{i-1}} v_i^{\lambda_i}, \quad \eta = u_i^{\mu_{i-1}} v_i^{\mu_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

so wird für jede dieser n Annahmen z eine gewöhnliche Potenzreihe von u_i, v_i. Diese Entwicklungen von z nennen wir der Reihe nach die erste, zweite, bis n-te Entwicklung von z.

Es konvergiere die Reihe für z in dem Gebiete $|\xi| \leqq \varrho$, $|\eta| \leqq \sigma$. Dann müssen wir die Größen u_i, v_i so beschränken, daß ξ, η sicher in dem Gebiete $|\xi| \leqq \varrho$, $|\eta| \leqq \sigma$ bleiben. Das ist der Fall, wie man sich leicht durch Ausrechnung überzeugt, wenn wir die Größen u_i, v_i den Bedingungen

$$|u_i|^\delta \leqq \sigma^{-\lambda_i} \varrho^{\mu_i}, \quad |v_i|^\delta \leqq \sigma^{\lambda_{i-1}} \varrho^{-\mu_{i-1}}$$

unterwerfen. Geben wir ξ einen festen Wert im Gebiete $|\xi| \leqq \varrho$, so liefert uns die i-te der Entwicklungen für z alle Werte von z für diejenigen Werte von η, die den Bedingungen

$$|u_i|^\delta = \left|\frac{\xi^{\mu_i}}{\eta^{\lambda_i}}\right| \leqq \sigma^{-\lambda_i} \varrho^{\mu_i}, \text{ d. h. } |\eta| \geqq \sigma \left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_i}{\lambda_i}},$$

$$|v_i|^\delta = \left|\frac{\eta^{\lambda_{i-1}}}{\xi^{\mu_{i-1}}}\right| \leqq \sigma^{\lambda_{i-1}} \varrho^{-\mu_{i-1}}, \text{ d. h. } |\eta| \leqq \sigma \left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}}$$

genügen. Wir setzen der Übersichtlichkeit halber

$$\tau_i = \sigma \left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_i}{\lambda_i}}, \qquad (i=0, 1, \ldots n)$$

so daß also wegen $\mu_0 = 0$ und $\lambda_n = 0$

$$\tau_0 = \sigma \quad \text{und} \quad \tau_n = 0$$

wird. Da allgemein $\lambda_{i-1}\mu_i - \mu_{i-1}\lambda_i = \delta$, so folgt

$$\frac{\mu_i}{\lambda_i} = \frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}} + \frac{\delta}{\lambda_i \lambda_{i-1}}$$

und, da alle Größen positiv sind,

$$\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}} > 0.$$

Daher ist für $|\xi| < \varrho$

$$\frac{\tau_i}{\tau_{i-1}} = \left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}} < 1,$$

$$\sigma = \tau_0 > \tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_n = 0.$$

Die erste Entwicklung für z gibt uns daher, wenn ξ im Gebiete $|\xi| \leqq \varrho$ gegeben ist, alle Werte von z für diejenigen Werte von η, für die

$$\sigma \geqq |\eta| \geqq \tau_1,$$

die zweite Entwicklung für diejenigen Werte von η, für die

$$\tau_1 \geqq |\eta| \geqq \tau_2$$

usw. und schließlich die n-te Entwicklung für diejenigen Werte von η, für die

$$\tau_{n-1} \geqq |\eta| \geqq 0.$$

Alle Entwicklungen zusammen geben uns also für irgend einen Wert von ξ in $|\xi| \leqq \varrho$ alle Werte von z für die Werte von η in $|\eta| < \sigma$.

Es sind noch die Größen u_i, v_i durch Größen des Körpers K zu ersetzen. Nun gelten folgende Sätze, die ich bei anderer Gelegenheit beweisen möchte. Es lassen sich Funktionen ξ_1, η_1, ζ_1 aus K so bestimmen, daß sie sich von ξ, η, ζ um Faktoren unterscheiden, die sich, wenn wir für z die Reihe (1.) des § 1 einführen, als gewöhnliche Potenzreihen von $x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}$ darstellen lassen, die für $x=y=0$ nicht verschwinden. Nun waren aber die Hilfsgrößen u_i, v_i so gewählt, daß sie sich in der Form darstellen ließen

$$u_i = \xi^{g_i} \eta^{h_i} \zeta^{k_i}, \quad v_i = \xi^{a_i} \eta^{b_i} \zeta^{c_i},$$

wo die Exponenten von ξ, η, ζ ganze Zahlen sind. Setzen wir

$$\overline{u}_i = \xi_1^{g_i} \eta_1^{h_i} \zeta_1^{k_i}, \quad \overline{v}_i = \xi_1^{a_i} \eta_1^{b_i} \zeta_1^{c_i},$$

so wird

$$\overline{u}_i = u_i E_{1i}, \quad \overline{v}_i = v_i E_{2i},$$

wo E_{1i} und E_{2i} gewöhnliche Potenzreihen von u_i, v_i werden, die für $u_i = v_i = 0$ nicht verschwinden. Daher werden die u_i, v_i auch gewöhnliche Potenzreihen von $\overline{u}_i, \overline{v}_i$ und können durch die Funktionen $\overline{u}_i, \overline{v}_i$ des Körpers K ersetzt werden.

§ 5.

Ein einfaches Beispiel hierzu ist

$$\zeta = \sqrt[5]{\xi^3 \eta}.$$

Hier haben wir $\delta = 5$, $\mathfrak{a} = 3$, $\mathfrak{b} = 1$. Wir finden der Reihe nach

$$\lambda_0=5, \quad \lambda_1=3, \quad \lambda_2=1, \quad \lambda_3=0,$$
$$\mu_0=0, \quad \mu_1=1, \quad \mu_2=2, \quad \mu_3=5,$$

haben also zur ganzen Darstellung von ζ in der Umgebung von $\zeta=0, \eta=0$ die drei Entwickelungen:

I.) $\xi=u_1^5 v_1^3, \quad \eta= \quad v_1, \quad \zeta=u_1^3 v_1^2,$

II.) $\xi=u_2^3 v_2, \quad \eta=u_2 v_2^2, \quad \zeta=u_2^2 v_2,$

III.) $\xi=u_3 \quad , \quad \eta=u_3^2 v_3^5, \quad \zeta=u_3 v_3.$

III. *Der allgemeine Fall.*

§ 1.

Es sei kurz an die Definitionen des § 4 des Abschnittes I erinnert. Es seien $t_i(x)$ die Verzweigungsstellen von $R(x)$. Es sei wieder $P(x, y)$ die schon am Ende von Abschnitt I. definierte ganze rationale Funktion niedrigsten Grades, die die Faktoren $y-t_i(x)$ enthält. Ist das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension von P bei der Entwicklung von P nach Potenzen von x, y durch x teilbar und ist ferner $x=0$ eine Verzweigungskurve, so setzten wir $xP=D$, in allen anderen Fällen $P=D$ und nannten die so definierte Funktion D die zu $R(x)$ gehörende Verzweigungsfunktion. Die Glieder niedrigster Dimension von D in x, y seien von der Dimension μ. Diese Zahl μ nannten wir den Rang der Verzweigung. Die Fälle $\mu=0$ oder $\mu=1$ haben wir im Abschnitt II erledigt.

Wir nehmen daher $\mu>1$ an und zeigen, daß man diesen Fall auf die einfachen Fälle des Abschnittes II zurückführen kann.

Wir führen statt x, y neue Veränderliche ξ, η ein durch eine lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante. Der Umgebung der Stelle $x=0$, $y=0$ entspricht dann eindeutig die Umgebung der Stelle $\xi=0$, $\eta=0$. Auch sind die Zusammenhangsverhältnisse der z-Werte für die beiden Umgebungen dieselben. Dadurch gehe D in Δ über. Die Transformation soll so gewählt werden, daß in Δ die Glieder mit ξ^μ, η^μ vorkommen. In dem Falle, wo in D das Glied y^μ vorkommt, nehmen wir bei der Transformation $x=\xi$; wir können dann immer noch erreichen, daß in Δ die Glieder mit ξ^μ, η^μ vorkommen.

Für die neuen Veränderlichen gelten dieselben Überlegungen wie für die Veränderlichen x, y. Die Projektionen der Verzweigungskurven für die neuen Veränderlichen werden uns, soweit sie durch die Stelle $\xi=0$, $\eta=0$ hindurchgehen, bei unseren Festsetzungen über D und die lineare Transformation, gegeben durch $\Delta=0$, wozu noch $\xi=0$ kommen kann.

Wir beschränken ξ, η auf ein Gebiet $|\xi|<\varrho$, $|\eta|<\sigma$ und denken uns die Werte von z für einen bestimmten Wert von ξ wieder auf einem Stück einer *Riemann*schen Fläche, das den Punkt $\eta=0$ umgibt, ausgebreitet. Wir bezeichnen dies Stück mit $P(\xi)$. Es habe β Blätter. Die Verzweigungspunkte dieser Fläche P finden wir durch Zerlegung von Δ. Es sei

$$\Delta=(\eta-\vartheta_1)(\eta-\vartheta_2)\dots(\eta-\vartheta_\mu)E,$$

wo E eine Einheit für $\xi=0$, $\eta=0$ ist und wo die ϑ_i für $\xi=0$ verschwinden. Dann sind die ϑ_i die Verzweigungspunkte von P, wenn nur ϱ und σ passend gewählt sind.

Nach unseren Voraussetzungen beginnen die Potenzreihen ϑ_i mit der ersten Potenz von ξ. Im genaueren sei

$$\vartheta_i=a_i\xi+a_{i1}\xi^{\varepsilon_1}+a_{i2}\xi^{\varepsilon_2}+\cdots, \qquad (1<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\dots)$$

wo die a_i nicht Null sind.

§ 2.

Wir setzen

$$\eta=\xi w.$$

Dadurch wird die Fläche P auf eine Fläche abgebildet, die die w-Ebene in der Umgebung des Nullpunktes β-fach überdeckt. Wir bezeichnen sie mit $W(\xi)$. Die Abbildung besteht in einer Drehung um den Nullpunkt und einer Ähnlichkeitstransformation und ist natürlich von ξ abhängig. Die Verzweigungspunkte von W entsprechen den Verzweigungspunkten von P, sind also die Stellen $\xi^{-1}\vartheta_i$ oder, wenn wir setzen

$$a_{i1}\xi^{\varepsilon_1-1}+a_{i2}\xi^{\varepsilon_2-1}+\cdots=t_i^{(1)}, \qquad (i=1,2,\dots\mu)$$

die Stellen $a_i+t_i^{(1)}$.

Die μ Größen a_i können alle oder zum Teil einander gleich sein. Es seien etwa die ersten λ unter einander gleich, also gleich a_0 und die letzten

$\mu-\lambda$, also gleich a_μ. Dieser Fall genügt, um den allgemeinen Fall deutlich zu übersehen. Da die Funktionen $t_i^{(1)}$ für $\xi=0$ verschwinden, so liegen die Verzweigungspunkte in der Umgebung der Stellen a_i, mithin der beiden Stellen a_1 und a_μ. Wir können daher um diese Punkte Kreise mit den Radien r_1' und r_2' beschreiben, so daß für $|\xi|<\varrho$ die Punkte $\xi^{-1}\vartheta_1, \xi^{-1}\vartheta_2, \ldots \xi^{-1}\vartheta_\lambda$ innerhalb des ersten und die Punkte $\xi^{-1}\vartheta_{\lambda+1}, \xi^{-1}\vartheta_{\lambda+2}, \ldots \xi^{-1}\vartheta_\mu$ innerhalb des zweiten Kreises bleiben. Ferner zeichnen wir einen Kreis mit dem Radius r_0' um den Nullpunkt, der die beiden anderen Kreise einschließt. Wir wollen die beiden Kreise um a_0 und a_μ so wählen, daß sie sich nicht schneiden, was bei hinreichend klein gewähltem ϱ möglich ist. Es seien ferner r_0' und ϱ so gewählt, daß für $|w|<r_0'$ und $|\xi|<\varrho$ sicher $|\eta|<\sigma$ wird. Die drei Kreise denken wir uns in der Fläche W in jedem ihrer β Blätter gezeichnet. Das von den 3β Kreisen eingeschlossene Gebiet heiße G'. Wir zeichnen ferner um die Punkte a_0, a_μ und den Nullpunkt Kreise mit den Radien $r_1>r_1', r_2>r_2'$ und $r_0<r_0'$, die sich nicht schneiden, und deren letzter die beiden ersten einschließt. Das von ihnen begrenzte Gebiet heiße G. Die Gebiete G, G' bestehen aus β kongruenten in den β Blättern von W über einander liegenden Stücken. Ihre Gestalt ist von ξ unabhängig. Dem Gebiete G entspricht in der Fläche $\boldsymbol{P}$ ein Gebiet, das wir $\boldsymbol{\Gamma}$ nennen; es besteht auch aus β kongruenten Stücken, deren jedes von drei Kreisen begrenzt wird, nämlich von drei Kreisen um die Stellen $a_0\xi, a_\mu\xi$ und den Nullpunkt mit den Radien $r_1\xi, r_2\xi, r_0\xi$. Dies Gebiet hängt von ξ ab und wird gleichzeitig mit $|\xi|$ unendlich klein. Es liegt zufolge der über r_0 und ϱ gemachten Voraussetzung für jedes ξ, für das $|\xi|<\varrho$, ganz im Gebiete $|\eta|<\sigma$. Wir bezeichnen ferner das durch die β Kreise mit dem Radius r_1 um a_0 begrenzte Gebiet von W mit G_1 und das durch die β Kreise um a_μ mit dem Radius r_2 begrenzte Gebiet von W mit G_2. Die G_1, G_2 in $\boldsymbol{P}$ entsprechenden Gebiete nennen wir Γ_1, Γ_2. Das Gebiet von $\boldsymbol{P}$, das noch nicht benannt ist und das außerhalb der β um den Nullpunkt mit dem Radius $r_0|\xi|$ beschriebenen Kreise liegt, heiße Γ_0.

§ 3.

Das Gebiet Γ. Wir können das Gebiet G mit einer endlichen Anzahl von Kreisen ganz überdecken, die zwar die Grenze von G schneiden, aber nicht die von G'. Es liegen dann in keinem dieser Kreise für $|\xi|<\varrho$ Verzweigungspunkte, da diese nach unseren Voraussetzungen für $|\xi|<\varrho$ nicht

aus den Gebieten G_1, G_2 herauskönnen. Einer dieser Kreise sei k. Im Innern dieses Kreises ist z eine algebraische Funktion von w und ξ, die höchstens die Verzweigungskurve $\xi=0$ hat. Wir haben also den Fall 1.) von Abschnitt II, § 1. Die Entwicklung, die wir nach dem dort angegebenen Verfahren für z bekommen, kann uns übrigens unter Umständen außer den in dem Kreise k ausgebreiteten Werten von z auch solche Werte von z liefern, die in einem oder mehreren der über oder unter k liegenden, mit k kongruenten Kreise ausgebreitet sind. Denn, wenn auch diese einzelnen Kreisflächen für konstantes ξ nicht mit einander zusammenhängen, so ist es doch nicht ausgeschlossen, daß sie durch Variieren von ξ in einander übergeführt werden können. Da für jeden der das Gebiet G überdeckenden Kreise Gleiches gilt, so können wir alle im Gebiete G, also auch alle im Gebiete Γ, ausgebreiteten Werte von z in der am Schlusse der Einleitung angegebenen Weise darstellen, und zwar für jedes ξ, für das $|\xi|<\varrho$.

Das Gebiet Γ_0. Wir können nach den Resultaten von Herrn *Hensel* einen Teil des von uns betrachteten Zweiges z nach Potenzen von ξ entwickeln mit Koeffizienten, die algebraische Funktionen von η sind. Da $\xi=0$ eine Verzweigungskurve sein kann, so kann diese Entwicklung nach gebrochenen Potenzen von ξ fortschreiten, etwa nach Potenzen von $\xi^{\frac{1}{a}}$. Die Koeffizienten lassen sich nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von η entwickeln und können negative Potenzen von η enthalten. Denken wir uns η als konstant, so wird z eine algebraische Funktion von ξ allein. Die Verzweigungspunkte dieser Funktion bekommen wir, indem wir die Funktion Δ in folgender Weise zerlegen

$$\Delta=(\xi-\theta_1)(\xi-\theta_2)\dots(\xi-\theta_\mu)\,\bar{E},$$

wo $\bar{E}$ eine Einheit ist und wo die θ_i Potenzreihen von η sind, die für $\eta=0$ verschwinden. Dann sind die Verzweigungspunkte die Stellen θ_i, zu denen noch, wenn $\xi=0$ eine Verzweigungskurve ist, die Stelle $\xi=0$ kommt. Es ist aber

$$\theta_i=a_i^{-1}\eta+\cdots,$$

wo die a_i die in den Entwicklungen der Verzweigungspunkte $\vartheta_i(\xi)$ von P vorkommenden Anfangskoeffizienten sind. Da die Größen a_i der Bedingung $|a_i|<r_0$ genügen, so kann man σ so klein gewählt annehmen, daß

für $|\eta| < \sigma$ alle Verzweigungspunkte außer $\xi = 0$ außerhalb des um den Punkt $\xi = 0$ mit dem Radius $|\eta| r_0^{-1}$ beschriebenen Kreises liegen. Die Reihe für z konvergiert dann innerhalb dieses Kreises, d. h. also wenn

$$|\xi| < |\eta| r_0^{-1} \quad \text{oder} \quad \left|\frac{\xi}{\eta}\right| < r_0^{-1}, \ |\eta| < \sigma.$$

Schreiben wir daher die Reihe als Potenzreihe von $\frac{\xi}{\eta}$ und ihre Koeffizienten als Potenzreihen von η, so wird sie eine im allgemeinen nach gebrochenen Potenzen dieser Größen fortschreitende Reihe, die aber keine negativen Potenzen mehr enthält, da sie sonst nicht in dem ganzen angegebenen Gebiet konvergieren könnte. Wir setzen

$$\frac{\xi}{\eta} = x_1, \quad \eta = y_1,$$

dann wird z eine Potenzreihe von x_1, y_1, und diese stellt uns Werte von z dar, die in dem Gebiete

$$|\eta| < \sigma, \ |\eta| > |\xi| r_0$$

ausgebreitet sind, also im Gebiete Γ_0. Jedoch bekommen wir eventuell nur die auf einem oder mehreren, aber nicht allen, der β Blätter, aus denen Γ_0 besteht, ausgebreiteten Werte von z. Für die auf den anderen Stücken ausgebreiteten Werte z gilt aber analoges. Die so erhaltene Reihe ist nach Abschnitt II weiter zu behandeln.

§ 4.

Die Gebiete Γ_1 und Γ_2. Es genügt, von diesen beiden Gebieten eins zu betrachten, da für das andere analoges gilt. Wir betrachten das Gebiet Γ_1 oder statt dessen das Gebiet G_1. Damit dem Mittelpunkte a_1 des Gebietes der Nullwert der Variablen entspricht, setzen wir $w = a_1 + y_1$ und der Gleichmäßigkeit wegen $\xi = x_1$. Das Gebiet G_1 kann in mehrere für konstantes x_1 nicht zusammenhängende Teile zerfallen, die aber eventuell zum Teil oder alle in einander übergeführt werden können durch Variieren von x_1. Diese Teile sind einander kongruent, da die Fläche G_1 nach dem am Schlusse von § 2 des Abschnittes I bewiesenen Satze folgende Eigenschaft hat. Liegt an einer Stelle von G_1 ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$, so

ist α ein Teiler von β und es liegen an der Stelle $\frac{\beta}{\alpha}$ Verzweigungspunkte der Ordnung $\alpha-1$ über einander. Wir betrachten eins der Gebiete, in die G_1 bei konstantem x_1 zerfällt, und nennen es $R_1(x_1)$. Für die anderen Teilgebiete von G_1 gilt analoges wie für R_1.

Das Gebiet R_1 hat vollkommen die wesentlichen Eigenschaften des Gebietes $R(x)$. Die zugehörige Verzweigungsfunktion erhalten wir aus Δ, indem wir darin für ξ, η die neuen Größen x_1, y_1 einführen. Es ist

$$\xi = x_1, \quad \eta = x_1(a_1 + y_1).$$

Führen wir dies in Δ ein, so wird Δ durch x_1^μ teilbar. Es sei

$$\Delta = x_1^\mu P_1(x_1, y_1).$$

Die Funktion P_1 entspricht dann der für das Gebiet R mit P bezeichneten Funktion. Wir setzen wieder, wenn $x_1 = 0$ eine Verzweigungskurve ist und das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension in x_1, y_1 von P_1 durch x_1 teilbar ist, $x_1 P_1 = D_1$, in allen anderen Fällen $P_1 = D_1$. Es ist dann D_1 die Verzweigungsfunktion von R_1. Es handelt sich noch darum, den Rang μ_1 der Verzweigung des Gebietes R_1 zu bestimmen. Es seien die Glieder niedrigster Dimension von P_1 von der Dimension λ_0. Nun sind die Glieder der niedrigsten Dimension in Δ

$$(\eta - a_1\xi)(\eta - a_2\xi) \dots (\eta - a_\mu\xi)$$

oder nach unseren Annahmen über die Größen $a_1, a_2, \dots a_\mu$

$$(\eta - a_1\xi)^\lambda (\eta - a_\mu\xi)^{\mu-\lambda}.$$

Führen wir hierin x_1, y_1 ein und lassen den Faktor x_1^μ fort, so bekommen wir folgende in P_1 vorkommenden Glieder

$$y_1^\lambda (a_1 - a_\mu + y_1)^{\mu-\lambda}.$$

Daraus folgt $\lambda_0 \leqq \lambda$. Ist nun $\lambda_0 = \lambda$, so kommt in P_1 das Glied mit $y_1^{\lambda_0}$ vor, es sind also die Glieder niedrigster Dimension nicht durch x_1 teilbar, so daß in diesem Falle $D_1 = P_1$ ist und der Rang $\mu_1 = \lambda$. Ist $\lambda_0 < \lambda$, so kann $D_1 = x_1 P_1$ sein. Es ist aber jedenfalls $\mu_1 \leqq \lambda$. Wir finden also $\mu_1 \leqq \lambda$, und da $\lambda \leqq \mu$, so wird

$$\mu_1 \leqq \mu.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur stehen, wenn $\lambda = \mu$ ist, wenn also die Glieder niedrigster Dimension in A die μ-te Potenz einer linearen Funktion von ξ, η sind und also die in D die μ-te Potenz einer linearen Funktion von x, y. Ist $\mu_1 < \mu$, so ist eine Vereinfachung eingetreten. Das Gebiet R_1 ist nun genau so zu behandeln, wie das Gebiet R. Können wir zeigen, daß der Rang der sich aus R_1 ergebenden Gebiete schließlich gleich Null oder Eins werden muß, so ist damit gezeigt, daß wir schließlich auf die Fälle des Abschnittes II zurückkommen, die sich auf die dort angegebene Art behandeln lassen. Da der Rang, wie wir gesehen haben, nicht größer werden kann, so genügt es zu zeigen, daß er nicht fortwährend konstant bleiben kann. Wir beweisen also im nächsten Paragraphen, daß es auf einen Widerspruch führt, wenn wir annehmen, daß der Rang fortgesetzt gleich μ bleibt.

§ 5.

Es sei also der Rang von R_1 wieder gleich μ. Das kann auf zwei Arten eintreten. Zunächst muß jedenfalls $\lambda = \mu$ sein. Ist dann die Dimension der Anfangsglieder von P_1 auch μ, so kommt in P_1 das Glied mit y_1^μ vor und es ist dann $D_1 = P_1$. Das ist die erste Art. Ist ferner die Dimension der Anfangsglieder von P_1 gleich $\mu - 1$ und $x_1 = 0$ eine Verzweigungskurve, so ist $D_1 = x_1 P_1$, und der Rang von R_1 wird auch μ. Das ist die zweite Art.

Wir zeigen zunächst, daß die zweite Art höchstens einmal eintreten kann, wenn der Rang fortwährend gleich μ bleiben soll. Es genügt, anzunehmen, daß die zweite Art gleich im Anfang auftritt. Es sei also $D_1 = x_1 P_1$. Da der Rang bei weiterer Transformation gleich μ bleiben soll, so muß, wie wir in § 4 sahen, das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension in D_1 die μ-te Potenz einer linearen Funktion sein, folglich, da D_1 den Faktor x_1 enthält, von der Form $c x_1^\mu$, wo c eine Konstante ist. Die Transformation, die zu P_2 und D_2 führt und die der Transformation entspricht, die von x, y (über ξ, η) zu x_1, y_1 führt, können wir dann in der Form annehmen

$$x_1 = x_2 y_2, \quad y_1 = x_2 (y_2 + \text{konst.}).$$

Soll der Rang auch bei der nächsten Transformation gleich μ bleiben und wieder der zweite Fall eintreten, so muß $D_2 = x_2 P_2$ werden und es muß gerade wie oben das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension gleich einer Kon-

stanten mal x_2^{μ} sein. Das ist aber nicht möglich, da D_1 durch x_1 teilbar ist und also P_2 durch y_2. Es tritt also der erste Fall ein, d. h. es wird $D_2 = P_2$ und es enthält D_2 das Glied mit y_2^{μ}. Da aber die Glieder niedrigster Dimension in D_2 sich wieder auf die Potenz einer linearen Funktion von x_2, y_2 reduzieren müssen, so sind sie also gleich einer Konstanten mal y_2^{μ}. Die folgende Transformation kann daher in der Form angenommen werden

$$x_2 = x_3, \quad y_2 = x_3 y_3.$$

Es wird dann die neue Funktion P_3 durch y_3 teilbar, so daß wieder nicht der zweite Fall eintreten kann. Es wird $D_3 = P_3$, und die Glieder niedrigster Dimension in D_3 reduzieren sich auf y_3^{μ} mal einer Konstanten. Es verhält sich alles wieder genau wie bei D_2, und es kann daher auch bei der folgenden Transformation nicht der zweite Fall eintreten. So würde es weiter gehen, und man sieht, wenn der Rang gleich μ bleiben soll, so kann der zweite Fall überhaupt nicht mehr eintreten.

Damit ist gezeigt, daß der Rang nur dadurch konstant bleiben kann, daß unendlich oft der erste Fall eintritt. Wir zeigen jetzt, daß auch das nicht möglich ist. Es sei also $D_1 = P_1$, und D_1 enthalte das Glied mit y_1^{μ}, so daß der erste Fall vorliegt. Die Transformation, die zu P_2 und D_2 führt, ist nach früherem in der Form anzunehmen

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = (c_1 \xi + \eta),$$
$$\xi = x_2, \quad \eta = \xi(c_2 + y_2),$$

wo c_1 und c_2 passend zu wählende Konstanten sind. Daraus folgt

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = (y_2 + b_1) x_2,$$

wenn wir $c_1 + c_2 = b_1$ setzen.

Es wird

$$D_1 = x_2^{\mu} P_2.$$

Da wiederum der erste Fall eintreten soll, so enthält P_2 das Glied mit y_2^{μ} und es wird $D_2 = P_2$. Die nächste Transformation ist wieder von der Form

$$x_2 = x_3, \quad y_2 = (y_3 + b_2) x_3,$$

und es wird

$$D_2 = x_3^{\mu} P_3 = x_3^{\mu} D_3.$$

So geht es fort. Wir bekommen also folgendes Resultat. Es gibt eine unendliche Folge von Transformationen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, \quad y_1 = (y_2 + b_1) x_2, \\ x_2 &= x_3, \quad y_2 = (y_3 + b_2) x_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_\nu &= x_{\nu+1}, \quad y_\nu = (y_{\nu+1} + b_\nu) x_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

aus denen folgt

$$D_1 = x_2^\mu D_2, \quad D_2 = x_3^\mu D_3, \ldots D_\nu = x_{\nu+1}^\mu D_{\nu+1}, \ldots$$

oder, da ja $x_{\nu+1} = x_1$ ist,

$$D_1(x_1, y_1) = x_1^{\mu\nu} D_{\nu+1}(x_1, y_{\nu+1}).$$

Aus den Transformationsformeln ergibt sich $\frac{\partial y_{\nu+1}}{\partial y_1} = x_1^{-\nu}$ und daher

$$\frac{\partial D_1}{\partial y_1} = x_1^{(\mu-1)\nu} \frac{\partial D_{\nu+1}}{\partial y_{\nu+1}}.$$

Nun hat aber D und also auch D_1 nach Voraussetzung keine mehrfachen Faktoren. Mithin können wir zwei ganze rationale Funktionen p und q von x_1, y_1 so bestimmen, daß

$$p D_1 + q \frac{\partial D_1}{\partial y_1} = g(x_1)$$

gleich einer ganzen rationalen Funktion von x_1 allein wird. Führen wir hierin die ersten ν Transformationen aus, so wird die linke Seite mindestens teilbar durch $x_1^{\nu(\mu-1)}$, während die rechte Seite unverändert bleibt. Da wir aber die Zahl ν und damit $\nu(\mu-1)$, wenn $\mu > 1$, beliebig groß annehmen können, so ergibt sich ein Widerspruch.

Es muß also schließlich der Fall eintreten, daß man nur noch Gebiete zu behandeln hat, deren Rang gleich Null oder Eins ist. Damit ist aber der am Schlusse der Einleitung aufgestellte Satz bewiesen.

Verzeichnis der in diesem Bande vorkommenden Namen.

Appel, P. 93.
Archimedes. 84.
Baker, H. F. 266.
Bertrand, J. L. F. 68.
Black, C. W. M. 290.
Bolza, O. 266.
Caspary, F. 243, 249, 250, 259, 261—267, 275, 277, 279, 282, 283.
Cayley, A. 244, 245, 248, 262, 268, 277, 282.
Charve, L. 97, 98.
Darboux, G. 75, 76.
Dedekind, R. 150.
Descartes, R. 285.
Dirichlet, P. G. L. 150, 164.
Euklid. 92.
Euler, L. 244, 245, 247, 248, 254, 256, 262, 268, 277, 282.
Fejér, L. 284, 285, 288.
Frobenius, G. 243, 276.
Fuchs, L. 2, 19.
Galois, E. 294.
Gauß, C. F. 150, 164.
Göpel, G. A. 250, 263, 271, 276, 277, 279, 280, 282, 283.
Graßmann, H. G. 246, 249, 267.
Halphen, G. H. 75, 76.
Hamburger, A. 20.
Hamilton, W. R. 181, 200.
Hazzidakis, J. N. 68.
Helmholtz, H., v. 229—231, 241.
Hensel, K. 289, 290, 309.
Hermite, Ch. 97—99, 105, 110, 164.
Horn, J. 19, 20, 67.
Jacobi, C. G. J. 97—99.
Jahnke, E. 243, 246, 247, 249, 254, 261, 264, 266, 267, 271, 275.
Jung, H. W. E. 289.
Klein, F. 266.
Kneser, A. 20.
Koenigsberger, L. 179, 180, 273.
Korkine, A. 98—100, 110, 125, 127, 152, 171.
Krause, M. 243.
Krazer, A. 264.
Kummer, E. E. 250, 283.
Lagrange, J. L. 150, 152, 179, 181—193, 195, 197—200, 202, 203, 205—217, 219—233, 235—242.
Laplace, P. S. 20.
Lecornu, L. F. A. 93.
Lobatschewsky, N. J. 92.
Loria, G. 77, 82, 85.
Minkowski, H. 97—100, 112, 147.
Möbius, A. F. 283.
Perron, O. 242.
Pirondini, G. 77.
Poincaré, H. 19, 20.
Réthy, M. 284.
Riemann, B. 92, 291, 307.
Rosenhain, J. G. 250, 271, 276, 277, 279, 282, 283.
Selling, E. 97, 98, 150, 151.
Serret, J. A. 150.
Stephanos, K. 68.
Study, E. 243, 258.
Taber, H. 246.
Taylor, B. 68, 284.
Thomé, L. W. 1, 2, 4, 8—13, 15—19, 21, 41, 52.
Tucker, R. 77.
Voronoï, G. 97, 242.
Weber, H. 258, 259, 261, 262, 283.
Weber, W. 236.
Weierstraß, K. 259.
Zolotareff, E. 97—100, 110, 125, 127, 145, 152, 171.

GENERAL
UNIV. C
MAY 1

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 133.

Heft IV.

Ausgegeben den 27. April.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1908.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 133. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

E. Jahnke, über orthogonale Substitutionen und die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten . . . . . Seite 243
Moritz Réthy, über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel . . . . . — 284
Heinrich W. E. Jung, Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung $x=a,\ y=b$ — 289
Namenverzeichnis . . . . . — 315

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35.

Dr. A. L. CRELLE's
RECHENTAFELN

WELCHE
ALLES MULTIPLIZIEREN UND DIVIDIEREN MIT ZAHLEN UNTER TAUSEND GANZ ERSPAREN, BEI GRÖSSEREN ZAHLEN ABER DIE RECHNUNG ERLEICHTERN UND SICHERER MACHEN.

NEUE AUSGABE

BESORGT VON **O. SEELIGER**

MIT TAFELN DER QUADRAT- UND KUBIKZAHLEN VON 1—1000
PREIS SOLID IN GANZLEINEN GEBUNDEN MARK 15.—

—— Neben der neuen Ausgabe wird die alte Ausgabe fortgeführt. ——

Die Crelle'schen Rechentafeln sind erneut amtlich empfohlen durch Verfügung des Finanzministers vom 12. Juni 1882 und Erlaß des Ministers der öffentlichen Arbeiten vom 21. Juni 1905.

Tafeln der
Funktionen cosinus und sinus
mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis und Hyperbelfunktionen)

von **Dr. Carl Burrau.**

Preis gebunden M. 4.—

Astronomischer Jahresbericht.

Begründet von **Walter F. Wislicenus.**
Mit Unterstützung der **Astronomischen Gesellschaft** herausgegeben von **A. Berberich**

Bis jetzt erschienen 8 Bände, enthaltend die Literatur der Jahre 1899—1906.

Preise: Bd. I M. 17.—, Bd. II M. 19.—, Bd. III M. 20.—, Bd. IV M. 19.—, Bd. V M. 20.—, Bd. VI M. 19.—, Bd. VII M. 20.—, Bd. VIII M. 21.—

Astrometrie
oder die Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume.
Zugleich als Grundlage aller Zeit- und Raummessung
von **Prof. Dr. Wilhelm Förster.**

Erstes Heft: Die Sphärik und die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnungen und die sphärischen Koordinatenmessungen.

Preis geheftet M. 4.—